Axiomatische Mengenlehre — Serie 10

P-points und Q-points — Besprechung am 7. Dezember

28. Eine Funktion $f : \omega \to \omega$ heisst *fast injektiv* falls für alle $n \in \omega$ gilt:

$$\big|\{k \in \omega : f(k) = n\}\big| < \omega$$

(a) Zeige: Ein Ultrafilter $\mathscr{U}$ ist genau dann ein P-point wenn es für jede Funktion $f : \omega \to \omega$ ein $x \in \mathscr{U}$ gibt, sodass $f|_x$ entweder konstant oder fast injektiv ist.

(b) Zeige: Ist $\mathscr{U}$ ein Q-point, so existiert für jede fast injektive Funktion $f : \omega \to \omega$ ein $x \in \mathscr{U}$, sodass $f|_x$ injektiv ist.

29. Zeige in ZFC, dass es Ultrafilter $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ gibt, die weder P-point noch Q-point sind.

Hinweis: Betrachte einen Ultrafilter $\mathscr{U}$, der den Filter

$$\mathscr{F} = \left\{ x \in [\omega]^\omega : \lim_{n\to\infty} \tfrac{|x \cap n|}{n} = 1 \right\}$$

enthält.

30. Zeige: Falls $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, so gibt es $2^{\mathfrak{c}}$ verschiedene Ramsey-Ultrafilter.