Axiomatische Mengenlehre Serie 11

MA $\Rightarrow \operatorname{cov}(\mathscr{N}) = \mathfrak{c}$ Besprechung am 13. Dezember

Sei

$$\mathscr{L} := \big\{X \subseteq [0,1] : X \text{ ist Lebesgue-messbar}\big\},$$

sei

$$\mathscr{N} := \big\{X \in \mathscr{L} : \mu(X) = 0\big\}$$

das Ideal der Nullmengen, wobei μ das Lebesgue-Maß bezeichnet, und sei

$$\operatorname{cov}(\mathscr{N}) := \min\big\{|\mathscr{F}| : \mathscr{F} \subseteq \mathscr{N} \wedge \bigcup\mathscr{F} = [0,1]\big\}$$

die *covering-number* der Nullmengen. Weiter sei

$$P := \big\{X \in \mathscr{L} : X \text{ ist abgeschlossen und } \mu(X) > 0\big\},$$

und für $X, Y \in P$ sei

$$X \leq Y \iff Y \subseteq X\,.$$

31. Zeige: $\omega_1 \leq \operatorname{cov}(\mathscr{N}) \leq \mathfrak{c}$.

32. Zeige: $(P, \leq)$ hat *ccc*.

33. Zeige mit Hilfe von MA: Ist $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{N}$ mit $|\mathscr{D}| < \mathfrak{c}$, so ist $\bigcup\mathscr{D} \neq [0,1]$.

34. Zeige: MA $\Rightarrow \operatorname{cov}(\mathscr{N}) = \mathfrak{c}$.