Axiomatische Mengenlehre   Serie 12

“Magic Sets” in ZFC + MA(σ-centred)   Besprechung am 21. Dezember

---

Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ heisst **dicht**, falls für jede offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ gilt: $D \cap O \neq \emptyset$. Eine Menge $Y \subseteq \mathbb{R}$ ist **nirgends dicht** falls $\operatorname{int}(\bar{Y}) = \emptyset$, oder anders ausgedrückt, falls $\mathbb{R} \setminus Y$ eine offen dichte Menge enthält. Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist **mager**, falls X eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Anders ausgedrückt, $X \subseteq \mathbb{R}$ ist mager genau dann wenn es eine abzählbare Familie $\{W_n : n \in \omega\}$ offen dichter Mengen gibt mit

$$\Big(\bigcap_{n\in\omega} W_n\Big) \cap X = \emptyset\,.$$

Weiter sei

$$\mathscr{M} := \big\{X \subseteq \mathbb{R} : X \text{ ist mager}\big\}$$

das Ideal der mageren Mengen, und sei

$$\operatorname{add}(\mathscr{M}) := \min\big\{|\mathscr{F}| : \mathscr{F} \subseteq \mathscr{M} \wedge \bigcup\mathscr{F} \notin \mathscr{M}\big\}$$

die *additivity-number* der mageren Mengen.

Sei $\{O_k : k \in \omega\}$ eine abzählbare Basis der Topologie auf $\mathbb{R}$, zum Beispiel die Menge der offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten. Für eine gegebene Familie $\mathscr{E} = \{U_\alpha \subseteq \mathbb{R} : \alpha \in \kappa < \mathfrak{c}\}$ von offen dichten Mengen definieren wir eine Partialordnung $(P, \leq)$ wie folgt: Die Bedingungen in P sind endliche Sequenzen der Form

$$p = \big\langle\langle Q_0, F_0\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle\big\rangle,$$

wobei für alle $i \in n$ gilt: $F_i \in \operatorname{fin}(\kappa)$, $Q_i = \bigcup_{k\in K} O_k$ für ein $K \in \operatorname{fin}(\omega)$, und $Q_i \subseteq \bigcap_{\alpha\in F_i} U_\alpha$. Ist $p = \big\langle\langle Q_0, F_0\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle\big\rangle$, so sei $\operatorname{dom}(p) := n$, und für $i \in n$ sei $p_i = \langle Q_i, F_i\rangle$, $p_i(0) = Q_i$, und $p_i(1) = F_i$.

Für $p = \big\langle\langle Q_0, F_0\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle\big\rangle$ und $q = \big\langle\langle Q'_0, F'_0\rangle, \dots, \langle Q'_{m-1}, F'_{m-1}\rangle\big\rangle$, sei

$$p \leq q \;:\Longleftrightarrow\; n \leq m \wedge \forall i \in n\big(F_i \subseteq F'_i \wedge Q_i \subseteq Q'_i\big).$$

35. (a) Zeige: $\omega_1 \leq \operatorname{add}(\mathscr{M}) \leq \mathfrak{c}$.

(b) Zeige: $(P, \leq)$ ist σ-centred.

(c) Für $\alpha \in \kappa$ sei

$$D_\alpha := \big\{p \in P : \exists i \in \operatorname{dom}(p)\big(\alpha \in p_i(1)\big)\big\}.$$

Zeige: Für jedes $\alpha \in \kappa$ ist D_α offen dicht in P.

(d) Für $i, k \in \omega$ sei

$$E_{i,k} := \{p \in P : i \in \mathrm{dom}(p) \wedge p_i(0) \cap O_k \neq \emptyset\}.$$

Zeige: Für alle $i, k \in \omega$ ist $E_{i,k}$ offen dicht in P.

(e) Sei $\mathscr{D} := \{D_\alpha : \alpha \in \kappa\} \cup \{E_{i,k} : i, k \in \omega\}$. Dann ist $\mathscr{D} \subseteq P$ und $|\mathscr{D}| \leq \kappa$. Sei nun $G \subseteq P$ ein $\mathscr{D}$-generischer Filter, und für $n \in \omega$ sei

$$V_n := \bigcup \{Q : \exists p \in G\big(n \in \mathrm{dom}(p) \wedge p_n(0) = Q\big)\}.$$

Zeige: $\bigcap_{n \in \omega} V_n \subseteq \bigcap_{\alpha \in \kappa} U_\alpha$

(f) Zeige: $\mathsf{MA}(\sigma\text{-centred}) \Rightarrow \mathrm{add}(\mathscr{M}) = \mathfrak{c}$.

(g) Zeige: $\mathsf{MA}(\sigma\text{-centred})$ impliziert (in ZFC) die Existenz einer magic set.