Axiomatische Mengenlehre Serie 13

Stichworte zur Prüfungsvorbereitung

1 Axiome der Mengenlehre

- Axiome der Mengenlehre; insbesondere Auswahlaxiom und äquivalente Formulierungen (*z.B.* Wohlordnungsprinzip und Teichmüller-Prinzip)
- Definition von Ordinalzahlen und deren Eigenschaften
- Zusammenhang zwischen Ordinalzahlen und wohlgeordneten Mengen
- Konstruktion von ω
- Transfinite Rekursion und einige Folgerungen daraus (*z.B.* Addition von Ordinalzahlen)
- Cummulative Hierarchie der Mengen

2 Kardinalitäten und Kardinalzahlen

- Cantor-Bernstein Theorem, Theorem von Cantor (in ZF)
- Definition von Kardinalzahlen als Ordinalzahlen (in ZFC)
- Kardinalzahlarithmetik
- Kofinalität einer Kardinalzahl und reguläre Kardinalzahlen
- Regularität von Nachfolgerkardinalzahlen
- Ungleichung von König-Jourdain-Zermelo und Folgerungen daraus wie zum Beispiel $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ und $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) > \omega$

3 Kardinalzahlcharakteristiken

- Definitionen der 12 Kardinalzahlcharakteristiken $\mathfrak{c}, \omega_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{p}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}, \mathfrak{hom}, \mathfrak{u}, \mathfrak{i}$ sowie der beiden Kardinalzahlcharakteristiken $\mathsf{cov}(\mathscr{N})$ und $\mathsf{add}(\mathscr{M})$
- Grössenbeziehungen zwischen diesen 14 Kardinalzahlcharakteristiken welche in ZFC bewiesen werden können (und welche in der Vorlesung oder in den Übungen behandelt wurden)

4 DER SATZ VON RAMSEY

- Beweis des Satzes von Ramsey
- Verallgemeinerungen und warum sie fehlschlagen
- die Ramsey-Eigenschaft von Mengen $A \subseteq [\omega]^\omega$

5 FILTER & ULTRAFILTER (ÜBER ω)

- Definitionen: Filter, Fréchet-Filter, Ultrafilter, Hauptultrafilter, nicht-triviale Ultrafilter, Ultrafiltertheorem
- Definition von Ramsey-Ultrafilter, P-point, Q-point
- Eigenschaften von P-points, Q-points und Ramsey-Ultrafiltern (*z.B.* bezüglich Funktionen $f : \omega \to \omega$)
- Verschiedene Charakterisierungen von P-points, Q-points und Ramsey-Ultrafiltern
- Existenz von Ramsey-Ultrafiltern unter der Annahme $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

6 DAS MARTIN-AXIOM

- Definitionen: Partialordnung, offen-dichte Mengen, *ccc*, $\mathscr{D}$-generischer Filter, *etc.*
- Defintion des Martin-Axioms MA
- $\mathsf{MA}(\omega)$ folgt aus ZFC
- Δ-System-Lemma
- Verallgemeinerungen von MA, wie *z.B.* $\mathsf{MA}(\mathfrak{c})$, und warum sie fehlschlagen
- $\mathsf{MA} \Rightarrow \operatorname{cov}(\mathscr{N}) = \mathfrak{c}$
- Definition von $\mathsf{MA}(\sigma\text{-centred})$ und Folgerungen daraus:
  $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, $\quad \omega \le \kappa < \mathfrak{c} \Rightarrow 2^\kappa = \mathfrak{c}$, $\quad \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, $\quad \operatorname{add}(\mathscr{M}) = \mathfrak{c}$, *"es existieren magic sets"*