Axiomatische Mengenlehre Serie 2

Modell der Peano Arithmetik Besprechung am 12. Oktober

Die Sprache der Peano Arithmetik, d.h. die Menge der nicht-logischen Symbole der Peano Arithmetik, ist $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}} = \{\mathtt{0}, \mathtt{s}, +, \cdot\}$, wobei “$\mathtt{0}$” ein Konstantensymbol ist, “$\mathtt{s}$” ein 1-stelliges Funktionssymbol ist, und “$+$” und “$\cdot$” 2-stellige Funktionssymbole sind. Die **Axiome der Peano Arithmetik** PA sind:

PA_1: $\neg\exists x(\mathtt{s}x = \mathtt{0})$

PA_2: $\forall x \forall y(\mathtt{s}x = \mathtt{s}y \to x = y)$

PA_3: $\forall x(x + \mathtt{0} = x)$

PA_4: $\forall x \forall y(x + \mathtt{s}y = \mathtt{s}(x + y))$

PA_5: $\forall x(x \cdot \mathtt{0} = \mathtt{0})$

PA_6: $\forall x \forall y(x \cdot \mathtt{s}y = (x \cdot y) + x)$

Ist φ eine Formel in der die Variable x frei (d.h. nicht gebunden) in φ vorkommt, dann ist folgende Aussage ein Axiom:

PA_7: $\Big(\varphi(\underbrace{x/\mathtt{0}}_{x \text{ wird ersetzt durch } \mathtt{0}}) \wedge \forall x\big(\varphi(x) \to \varphi(x/\mathtt{s}x)\big)\Big) \to \forall x \varphi(x)$

Beachte, dass PA_7 ein Axiomenschema ist, das sogenannte *Induktionsschema*.

Ein **Modell** M der Peano Arithmetik besteht aus einer Menge M, einem Element

$$\mathtt{0}^{\mathbf{M}} \in M,$$

einer 1-stelligen Funktion

$$\mathtt{s}^{\mathbf{M}} : M \to M$$

und zwei 2-stelligen Funktionen

$$+^{\mathbf{M}} : M \times M \to M \quad \text{und} \quad \cdot^{\mathbf{M}} : M \times M \to M,$$

sodass die *Struktur* $(M, \mathtt{0}^{\mathbf{M}}, \mathtt{s}^{\mathbf{M}}, +^{\mathbf{M}}, \cdot^{\mathbf{M}})$ die Axiome PA_1–PA_7 erfüllt.

9. Konstruiere mit den Axiomen 0–6 der Mengenlehre (ZFC) ein Modell der Peano Arithmetik (PA) mit Bereich ω.