Axiomatische Mengenlehre Serie 3

Ersetzungs- & Fundierungsaxiom Besprechung am 19. Oktober

10. (a) Definiere mit Hilfe des TRANSFINITEN REKURSIONSTHEOREMs die Multiplikation von Ordinalzahlen.

(b) Definiere mit Hilfe des TRANSFINITEN REKURSIONSTHEOREMs die Exponentiation von Ordinalzahlen.

11. Zeige mit Hilfe des Fundierungsaxioms, dass für alle nicht-leeren Mengen x gilt:

$$\emptyset \in \mathrm{TC}(x)$$

12. *Goodstein Sequenzen*: Für $n, m \in \omega$, wobei $n \geq 2$, definieren wir die Basis-n-Repräsentation von m wie folgt: Zuerst wird m als Summe von abnehmenden Potenzen von n geschrieben, danach werden die Exponenten in dieser Darstellung wieder als Summen von abnehmenden Potenzen von n geschrieben, und so fort.

Zum Beispiel ist die Basis-2-Repräsentation von 266:

$$2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1$$

Die Zahl $G_n(m)$ ist wie folgt definiert: Ist $m = 0$, so ist $G_n(m) := 0$; sonst ist $G_n(m)$ die Zahl welche wir erhalten, wenn wir n in der Basis-n-Repräsentation von m überall durch $n+1$ ersetzen, dann 1 subtrahieren und das Ergebnis in der Basis-$(n+1)$-Repräsentation schreiben. Zum Beispiel ist:

$$G_2(266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3^1 - 1 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2$$

Wir definieren nun die Goodstein Sequenz für m, beginnend mit 2, durch: $m_0 = m$, $m_1 = G_2(m_0)$, $m_2 = G_3(m_1)$, $m_3 = G_4(m_2), \ldots$

(a) Sei nun $m_0 = 266$. Schreibe die Zahlen m_1, m_2, m_3 auf und zeige, dass gilt: $m_0 < m_1 < m_2 < m_3$.

(b) Ersetze in der Basis-$(i+2)$-Repräsentation von m_i (wobei $0 \leq i \leq 3$), überall die Zahl $i+2$ durch ω und betrachte diese Zahlen als Ordinalzahlen $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$.

(c) Zeige, dass gilt: $\mu_0 \ni \mu_1 \ni \mu_2 \ni \mu_3$.

(d) Zeige: $\forall m \in \omega \, \exists k \in \omega \, (m_k = 0)$.