

Im Folgenden bezeichne " \leq " eine Partialordnung auf einer Menge P (d.h. " \leq " ist eine reflexive, antisymmetrische, transitive, binäre Relation auf P).

Eine nicht-leere Menge $K \subseteq P$ welche durch \leq linear geordnet wird heisst *Kette* in P .

Ist $C \subseteq P$ eine nicht-leere Menge und hat $p_0 \in P$ die Eigenschaft, dass für alle $x \in C$ gilt $x \leq p_0$, dann heisst p_0 *obere Schranke* von C .

Ein Element $p \in P$ ist *maximal* in P (bezüglich \leq) falls es kein $x \in P$ gibt mit $p < x$, wobei gilt: $p < x \iff p \leq x \wedge p \neq x$.

KURATOWSKI-ZORN LEMMA. Sei P eine nicht-leere Menge und sei \leq eine Partialordnung auf P . Hat jede Kette in P eine obere Schranke, so hat P ein bezüglich \leq maximales Element.

Eine Familie \mathcal{F} von Mengen hat *endlichen Charakter*, falls für jede Menge x gilt: $x \in \mathcal{F}$ genau dann wenn jede endliche Teilmenge von x zu \mathcal{F} gehört.

TEICHMÜLLERPRINZIP. Sei \mathcal{F} eine nicht-leere Familie von Mengen. Hat \mathcal{F} endlichen Charakter, dann hat \mathcal{F} ein, bezüglich Inklusion \subseteq , maximales Element.

13. Zeige die folgenden Implikationen:

- (a) WOHLORDNUNGSPRINZIP \Rightarrow KURATOWSKI-ZORN LEMMA
- (b) KURATOWSKI-ZORN LEMMA \Rightarrow TEICHMÜLLERPRINZIP
- (c) TEICHMÜLLERPRINZIP \Rightarrow AUSWAHLAXIOM

Ist $f : A \rightarrow B$ eine Funktion, so ist die Funktion $g : B \rightarrow A$ ein *Rechtsinverses* (*Linksinverses*) von f , falls die Funktion $f \circ g$ (bzw. $g \circ f$) die Identität auf B (bzw. A) ist.

14. (a) Zeige, dass die folgende Aussage äquivalent zum AUSWAHLAXIOM ist.

Jede Surjektion $f : A \rightarrow B$ mit $A, B \neq \emptyset$ hat ein Rechtsinverses.

- (b) Zeige, dass die folgende Aussage ohne das AUSWAHLAXIOM zu benutzen bewiesen werden kann.

Jede Injektion $f : A \rightarrow B$ mit $A, B \neq \emptyset$ hat ein Linksinverses.