Axiomatische Mengenlehre Serie 5

zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ Besprechung am 2. November

---

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ werden üblicherweise aus $\mathbb{Q}$ mit Hilfe von Dedekind'schen Schnitten (oder Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen) definiert. Weiter lässt sich zeigen (z.B. mit Hilfe von Kettenbrüchen), dass gilt $|\mathbb{R}| = \mathscr{P}(\omega)|$. Die Kardinalität $|\mathbb{R}|$ wird mit $\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}$ für Continuum) oder mit $2^{\aleph_0}$ bezeichnet. Insbesondere ist mit dem SATZ VON CANTOR die Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ überabzählbar.

15. Bestimme die Kardinalität der Menge der

(a) Funktionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$,

(b) Funktionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$,

(c) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(d) stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

16. Sei V der Vektorraum $\mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$.

Zeige mit Hilfe des Auswahlaxioms, dass es eine lineare Funktion $f : V \to V$ gibt, welche nirgends stetig ist.

17. (a) Zeige, dass es eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, welche auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig und auf $\mathbb{Q}$ unstetig ist.

(b)* Zeige, dass es keine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, welche auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ unstetig und auf $\mathbb{Q}$ stetig ist.