Axiomatische Mengenlehre Serie 6

Konstruktion einer “Magic Set” in ZFC $+$ CH Besprechung am 9. November

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst **nirgends konstant**, falls für jedes offene, nicht leere Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gilt: $f|_I$ ist nicht konstant.

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist eine **magic set**, wenn für alle stetigen, nirgends konstanten Funktionen f, g gilt:

$$g[M] \subseteq f[M] \Rightarrow f = g.$$

18. (a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall mit nicht leerem Inneren, sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, nirgends konstante Funktion und sei $x \in \mathbb{R}$.
Zeige, dass $f^{-1}(\{x\})$ nicht dicht ist in I.

(b) Sei I wie oben. Folgere aus (a), dass

$$I \setminus \Big(\bigcup_{n\in\omega} f_n^{-1}\big(\{x_n\}\big) \Big) \neq \emptyset$$

für jede Folge $(x_n)_{n\in\omega}$ in $\mathbb{R}$ und alle Folgen $(f_n)_{n\in\omega}$ von stetigen, nirgends konstanten Funktionen.

(c) Zeige, dass die Menge

$$\mathscr{F} := \big\{ \langle f, g \rangle : f, g \text{ sind verschieden, stetig und nirgends konstant} \big\}$$

die Kardinalität $\mathfrak{c}$ hat.

(d) Zeige, dass es für zwei verschiedene stetige Funktionen f und g ein abgeschlossenes Intervall I mit nicht leerem Inneren gibt, sodass für jedes $x \in I$ gilt: $f(x) \neq g(x)$.

(e) Konstruiere in einem Modell von ZFC $+$ CH, *d.h.* in einem Modell von ZFC in dem die Kontinuumshypothese gilt, mittels transfiniter Induktion eine magic set.

Hinweis: Benutze die Teilaufgaben (b), (c), (d).