Axiomatische Mengenlehre Serie 9

Eigenschaften von Ultrafiltern Besprechung am 30. November

---

24. Sei $S \neq \emptyset$ eine Menge.

Zeige, zum Beispiel mit dem Teichmüller Prinzip, dass sich jeder Filter $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(S)$ zu einem Ultrafilter $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(S)$ erweitern lässt.

25. Zeige, dass es $2^{\mathfrak{c}}$ paarweise verschiedene Ultrafilter $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ gibt.

Hinweis: Verwende eine *independent family* der Kardinalität $\mathfrak{c}$.

26. Für $x \in [\omega]^\omega$ sei $f_x : \omega \to x$ die aufsteigende Abzählung von x, *d.h.* f_x ist eine surjektive, streng monoton wachsende Funktion und für alle $k \in \omega$ gilt:

$$\big|x \cap f_x(k)\big| = k$$

(a) Zeige: Ist $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Ultrafilter, so ist $\{f_x : x \in \mathscr{U}\}$ eine "unbounded family".

(b) Zeige: Ist $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Q-point, so ist $\{f_x : x \in \mathscr{U}\}$ eine "dominating family".

27. Eine Familie $\mathscr{B} \subseteq [\omega]^\omega$ ist eine *Basis für einen nicht-Hauptultrafilter* $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$, falls gilt:

$$\mathscr{U} = \{y \in [\omega]^\omega : \exists x \in \mathscr{B}(x \subseteq y)\}$$

Sei $\mathfrak{u}$ die kleinste Kardinalität einer Basis für einen nicht-Hauptultrafilter, *d.h.*,

$$\mathfrak{u} := \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subseteq [\omega]^\omega \textit{ ist eine Basis für einen nicht-Hauptultrafilter}\}.$$

Zeige: $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{u}$.