Axiomatische Mengenlehre – Serie 8 – Musterlösung

Aufgabe 21a

Wir definieren

$$\pi^* : [\omega]^2 \to r$$
$$\{a,b\} \mapsto \pi(a+b).$$

Nach Ramsey's Theorem gibt es eine Menge $S \in [\omega]^\omega$, die bezüglich π^* monochromatisch ist. Das heisst, es gibt ein $j \in r$ mit

$$\forall \{a,b\} \in [S]^2 \; \pi^*(\{a,b\}) = \pi(a+b) = j.$$

Aufgabe 21b

Analog zu Teilaufgabe a.

Aufgabe 22a

Sei $\mathcal{A} = \{x_n \mid n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ eine abzählbare Menge. Wir definieren

$$a_0 := \min(x_0) \; ; \; b_0 := \min(x_0 \setminus (a_0 + 1)).$$

Weiter sei für alle $n \in \omega \setminus \{0\}$:

$$a_n := \min(x_n \setminus b_{n-1}) \; ; \; b_n := \min(x_n \setminus (a_n + 1)).$$

Sei $B := \{b_n \mid n \in \omega\}$. Es gilt für jedes $n \in \omega$

$$a_n \in x_n \setminus B.$$

Also ist $[B]^\omega \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

Aufgabe 22b

Für alle $x, y \in [\omega]^\omega$ definieren wir

$$x \sim y :\Leftrightarrow |x \triangle y| < \omega,$$

wobei $x \triangle y := (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ ist. Bemerke, dass "$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf $[\omega]^\omega$ definiert. Sei f eine Funktion, die aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten auswählt. Wir definieren

$$\pi : [\omega]^\omega \to 2$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } |x \triangle f([x])| \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $B \in [\omega]^\omega$ beliebig und sei $\mathcal{A} := \pi^{-1}[\{1\}]$. Wir unterscheiden 2 Fälle:

1.Fall: $B \in \mathcal{A}$

Es gilt also $[B]^\omega \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Bleibt also noch nachzuprüfen, dass auch $[B]^\omega \not\subseteq \mathcal{A}$ ist. Es gilt $B \setminus \min(B) \sim B$. Somit folgt

$$f([B\setminus \min(B)]) = f([B]).$$

Also

$$|B\setminus \min(B) \triangle f([B\setminus \min(B)])| = |B \setminus \min(B) \triangle f([B])| =$$
$$= |B \triangle f([B])| \pm 1.$$

Also $\pi(B\setminus \min(B)) = 0$, d.h. $B\setminus \min(B) \notin \mathcal{A}$.

2.Fall: $B \notin \mathcal{A}$

Analog zum ersten Fall.

Aufgabe 22c

Sei $\mathcal{A}$ eine fast disjunkte Familie der Kardinalität $\mathfrak{c}$. Eine solche Familie können wir auch ohne das Auswahlaxiom finden, indem wir die Menge M (siehe Musterlösung zu SoA2a) geeignet abzählen. Sei $B \in [\omega]^\omega$.
Gilt bereits $[B]^\omega \cap \mathcal{A} = \emptyset$, so sind wir fertig. Ansonsten sei $C \in [B]^\omega$ mit $C \in \mathcal{A}$ und wir definieren $B' := C \setminus \min(C)$. Angenommen es gibt ein $D \in [B']^\omega$ mit $D \in \mathcal{A}$. Dann wären aber D und B' nicht fast disjunkt $\lightning$. Also gilt tatsächlich

$$[B']^\omega \cap \mathcal{A} = \emptyset.$$

Aufgabe 23

- "$\omega_1 \leq \mathfrak{hom}$": Indirekt. Angenommen $\mathcal{H} = \{x_n \mid n \in \omega\}$ ist eine abzählbare, homogene Familie. Sei

$$a_0 \in x_0, \quad b_0 \in x_0 \setminus (a_0+1), \quad c_0 \in x_0 \setminus (b_0+1)$$

und für jedes $n \in \omega \setminus \{0\}$

$$a_n \in x_n \setminus (c_{n-1}+1) \quad b_n \in x_n \setminus (a_n+1) \quad c_n \in x_n \setminus (b_n+1).$$

Weiter definieren wir

Axiomatische Mengenlehre Serie 8

Der Satz von Ramsey Besprechung am 23. November

23. Eine Familie $\mathscr{F} \subseteq [\omega]^{\omega}$ heisst *homogen*, falls für jede Färbung $\pi : [\omega]^2 \to 2$ ein $x_\pi \in \mathscr{F}$ existiert, so dass $\pi|_{[x_\pi]^2}$ konstant ist.

Sei $\mathfrak{hom}$ die kleinste Kardinalität einer homogenen Familie, *d.h.*,

$$\mathfrak{hom} := \min\{|\mathscr{F}| : \mathscr{F} \subseteq [\omega]^\omega \wedge \mathscr{F} \textit{ ist homogen}\}.$$

Zeige: $\max\{\mathfrak{r}, \mathfrak{d}\} \leq \mathfrak{hom} \leq \mathfrak{c}$.

Beweis. Der Satz von Ramsey besagt das $[\omega]^{\omega}$ homogen ist, also gilt $\mathfrak{hom} \leq |[\omega]^\omega| = \mathfrak{c}$.

Wir zeigen zuerst $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{hom}$. Sei $\mathscr{F}$ homogen. Wir zeigen das $\mathscr{F}$ reaping ist, was dann bedeutet, dass die kleinste reaping Familie maximal so groß ist wie die minimale homogene. Sei $x \in [\omega]^\omega$. Definiere eine Färbung π, sodass $\pi(\{a, b\}) = 0$ genau dann wen $a, b \in x$. Da $\mathscr{F}$ homogen ist existiert $F \in \mathscr{F}$ mit $\pi \restriction [F]^2$ konstant. Falls es konstant 0 ist, sind alle Elemente von F in x, und falls es konstant 1 ist sind alle Elemente von F nicht in x. Also ist $\mathscr{F}$ eine reaping Familie.

Nun zeigen wir $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{hom}$. Für $X \in [\omega]^\omega$ sei $f_X : \omega \to \omega$ die aufsteigende Enumerierung von X, heißt $f(n)$ ist das n-te Element von X. Wir zeigen das wen $\mathscr{F}$ homogen ist, dann ist $\{f_X |\ X \in \mathscr{F}\}$ eine dominierende Familie. Sei $g \in \omega^\omega$. Definiere eine Färbung mit $\pi(\{a < b\}) = 0$ genau dann wen $a \neq 0$ und $g(a) < b$. Da $\mathscr{F}$ homogen ist existiert $X \in \mathscr{F}$ sodass $\pi \restriction [X]^2$ konstant ist. Da F unendlich ist muss es konstant 0 sein, andernfalls sei $a \in F$ minimal und dann wären alle Elemente von F kleiner alls $g(a)$. Nun haben wir also für alle n, $\pi(\{f_X(n), f_X(n+1)\}) = 0$. Dies bedeutet insbesondere $0 \notin F$, weshalb $f_X(n) \geq n + 1$. Dann haben wir

$$g(n+1) \leq g(f_X(n)) \leq f_X(n+1).$$

Damit gilt f_X dominiert g. $\dashv$