$$f_x(f(2n)) \geq f(2n+1).$$

Also
$$f_x(f(2n)) \geq f(2n+1) = f(2n) + g(f(2n)) > g(f(2n)).$$

Das heisst, $f_x \not<^* g$ ↯

2. Fall: $y \in \mathcal{U}$

Dieser Fall folgt ganz analog: Es gilt, da f_x streng monoton wächst
$$f_x(f(2n+1)) \geq f(2n+1). \quad (\text{für jedes } n \in \omega)$$

Da aber $[f(2n+1), f(2n+2)[\cap y = \emptyset$ ist und $\mathrm{im}(f_x) \subseteq y$ ist, erhalten wir
$$f_x(f(2n+1)) \geq f(2n+2)$$

Also
$$f_x(f(2n+1)) \geq f(2n+2) = f(2n+1) + g(f(2n+1)) > g(f(2n+1)).$$

Also $f_x \not<^* g$.

Aufgabe 25b

Sei $g \in {}^\omega\omega$. OBdA können wir annehmen, dass g streng monoton wachsend mit $g(0) > 2$ ist. Wir definieren $I_{-1} := [0, g(0)[$ und für jedes $n \in \omega$
$$I_n = [g(2n), g(2n+2)[.$$

Offenbar ist $\{I_n \mid n \in \omega \cup \{-1\}\}$ eine Partition von ω in endliche Stücke. Da $\mathcal{U}$ ein Q-point ist, gibt es ein $x \in \mathcal{U}$, sodass
$$|I_n \cap x| \leq 1$$
ist für jedes $n \in \omega \cup \{-1\}$. Da
$$|I_n \cap \mathrm{im}(g)| = 2 \text{ ist für alle } n \in \omega$$
ist, erhalten wir also $g <^* f_x$.

Aufgabe 28a)

($\Rightarrow$) Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, der auch ein P-point ist. Sei $f \in {}^\omega\omega$. Wir definieren für jedes $n \in \omega$
$$Y_n := \{k \in \omega \mid f(k) = n\}$$

Dann ist $\{Y_n \mid n \in \omega\}$ eine Partition von ω und somit existiert ein $x \in \mathcal{U}$ mit

1. Fall: $x \subseteq Y_n$ für ein $n\in\omega$

In diesem Fall ist $f|_x$ konstant.

2. Fall: $|x\cap Y_n|<\omega$ für alle $n\in\omega$

In diesem Fall ist $f|_x$ fast injektiv.

($\Leftarrow$) Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter und $\{Y_n \mid n\in\omega\}$ eine beliebige Partition von ω.

Wir definieren

$$f:\omega\longrightarrow\omega$$
$$k\longmapsto n,\text{ falls } k\in Y_n \text{ ist}$$

Dann existiert ein $x\in\mathcal{U}$, sodass einer der folgenden beiden Fälle eintritt:

1. Fall: $f|_x$ ist konstant

Dann ist $x\subseteq Y_n$ für ein $n\in\omega$.

2. Fall: $f|_x$ ist fast injektiv

In diesem Fall gilt für alle $n\in\omega$ $(|x\cap Y_n|<\omega)$.

Somit ist $\mathcal{U}$ also ein P-point.

Aufgabe 28b)

($\Rightarrow$) Sei $f\in{}^{\omega}\omega$ eine fast injektive Funktion und $\mathcal{U}$ ein Q-point. Wir definieren

$$Y_n=\{k\in\omega \mid f(k)=n\}.$$

Dann ist $\{Y_n \mid n\in\omega\}$ eine Partition von ω mit $|Y_n|<\omega$ für alle $n\in\omega$, da f fast injektiv ist. Somit gibt es ein $x\in\mathcal{U}$, sodass

$$|x\cap Y_n|\leq 1$$

ist für alle $n\in\omega$.

($\Leftarrow$) Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter und $\{Y_n \mid n\in\omega\}$ eine Partition von ω mit $|Y_n|<\omega$ für alle $n\in\omega$. Wir definieren

$$f:\omega\to\omega$$
$$k\mapsto n,\text{ wenn } k\in Y_n \text{ ist.}$$

Die Funktion f ist fast injektiv, da $|Y_n|<\omega$ für jedes $n\in\omega$. Daher gibt es ein $x\in\mathcal{U}$, sodass $f|_x$ injektiv ist. Also gilt

$$|x\cap Y_n|\leq 1$$

für alle $n\in\omega$ und damit ist $\mathcal{U}$ ein Q-point.

Aufgabe 30

Angenommen $\mathfrak{p}=\mathfrak{c}$. Für jede 0-1-Folge $a=\langle a_\lambda \mid \lambda\in\mathfrak{c}\rangle$ werden wir einen Ramsey-Ultrafilter definieren. Am Schluss werden wir dann zeigen, dass dies paarweise verschiedene Ramsey-Ultrafilter sind. Da $|[\omega]^2|=\omega$ ist, existieren $|{}^\omega 2|=2^\omega=\mathfrak{c}$ viele 2-Färbungen $\pi:[\omega]^2\to 2$. Sei

$$\{\pi_\alpha \mid \alpha\in\mathfrak{c}\}$$

eine Abzählung aller 2-Färbungen von ω. Nach dem Satz von Ramsey gibt es ein monochromatisches $x_0\in[\omega]^\omega$ bezüglich π_0. Dieses x_0 teilen wir auf in zwei disjunkte Mengen der Kardinalität ω, x_0^0 und x_0^1. Sei nun $\alpha\in\mathfrak{c}\setminus\{0\}$. Wir nehmen an, für alle 0-1-Sequenzen $b=\langle b_\lambda \mid \lambda\in\alpha+1\rangle$ haben wir $x_\alpha^b\in[\omega]^\omega$ bereits definiert. Für jede solche 01-Sequenz b definieren wir nun

$$x_{\alpha+1}^{\langle b,0\rangle} \quad\text{und}\quad x_{\alpha+1}^{\langle b,1\rangle}$$

wie folgt: Benutze den Satz von Ramsey, um eine Menge $x_{\alpha+1}^b\in[x_\alpha^b]^\omega$ zu finden mit $\pi_{\alpha+1}|_{[x_{\alpha+1}^b]^2}=\text{konst}$. Teile $x_{\alpha+1}^b$ in zwei unendliche Mengen $x_{\alpha+1}^{\langle b,0\rangle}$ und $x_{\alpha+1}^{\langle b,1\rangle}$ der Kardinalität ω auf mit

$$x_{\alpha+1}^{\langle b,0\rangle}\cap x_{\alpha+1}^{\langle b,1\rangle}=\emptyset.$$

Sei nun $\alpha\in\mathfrak{c}\setminus\{0\}$ eine Limesordinalzahl und angenommen für jede 01-Sequenz $b=\langle b_\lambda \mid \lambda\in\alpha\rangle$ und jedes $\beta\in\alpha$ haben wir bereits $x_\beta^{\langle b_\lambda \mid \lambda\in\beta\rangle}$ definiert. Sei $c=\langle c_\lambda \mid \lambda\in\alpha\rangle$ eine 01-Sequenz. Dann erfüllt die Menge

$$\mathcal{F}:=\{x_\beta^{\langle c_\lambda \mid \lambda\in\beta\rangle} \mid \beta\in\alpha\}$$

die sfip und hat Kardinalität $|\mathcal{F}|<\mathfrak{c}=\mathfrak{p}$. Also hat $\mathcal{F}$ einen Pseudo-durchschnitt $\tilde{x}_\alpha\in[\omega]^\omega$. Mit dem Satz von Ramsey gibt es ein $x_\alpha\in[\tilde{x}_\alpha]^\omega$ mit $\pi_\alpha|_{[x_\alpha]^2}=\text{konst}$. Seien $x_\alpha^{\langle c,0\rangle}\in[\omega]^\omega$ und $x_\alpha^{\langle c,1\rangle}\in[\omega]^\omega$ mit $x_\alpha^{\langle c,0\rangle}\cap x_\alpha^{\langle c,1\rangle}=\emptyset$ und $x_\alpha^{\langle c,0\rangle}\cup x_\alpha^{\langle c,1\rangle}=x_\alpha$.

Für jede 01-Folge $b=\langle b_\lambda \mid \lambda\in\mathfrak{c}\rangle$ definieren wir

$$\mathcal{G}_b:=\{x_\beta^{\langle b_\lambda \mid \lambda\in\beta+1\rangle} \mid \beta\in\mathfrak{c}\}.$$

Wir erweitern $\mathcal{G}_b$ zu einem Ultrafilter $\mathcal{F}_b$.

Nach Konstruktion ist $\mathcal{F}_b$ ein Ramsey-Ultrafilter. Bleibt noch zu zeigen, dass die $\mathcal{F}_b$'s paarweise verschieden sind: Seien $b = \langle b_\lambda \mid \lambda \in c \rangle$ und $b' = \langle b'_\lambda \mid \lambda \in c \rangle$ verschiedene 01-Folgen. Dann gibt es ein $\lambda_0 \in c$ mit $b'_{\lambda_0} \neq b_{\lambda_0}$. Das heisst

$$\underbrace{X_{\lambda_0}^{\langle b_\lambda \mid \lambda \in \lambda_0 + 1 \rangle}}_{\in \mathcal{F}_b} \cap \underbrace{X_{\lambda_0}^{\langle b'_\lambda \mid \lambda \in \lambda_0 + 1 \rangle}}_{\in \mathcal{F}_{b'}} = \emptyset$$

Da $\mathcal{F}_b$ und $\mathcal{F}_{b'}$ Ultrafilter sind, folgt $\mathcal{F}_b \neq \mathcal{F}_{b'}$, da

$$X_{\lambda_0}^{\langle b'_\lambda \mid \lambda \in \lambda_0 + 1 \rangle} \notin \mathcal{F}_b.$$

Aufgabe 29

Sei (wie im Hinweis) $\mathcal{F} := \{ x \in [\omega]^\omega \mid \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{|x \cap n|}{n}}_{=: d(x)} = 1 \}$. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, der $\mathcal{F}$ erweitert.

Dichte von x

Behauptung 1: $\mathcal{U}$ ist kein P-point

Für jedes $n \in \omega$ sei

$$u_n := \{ k \in \omega \mid k \equiv (2^n - 1) \bmod 2^{n+1} \}.$$

Für jedes $n \in \omega$ gilt $d(u_n) = 2^{-(n+1)}$. Ausserdem ist

$$\{ u_n \mid n \in \omega \}$$

eine Partition von ω. Wir nehmen an, $\mathcal{U}$ ist ein P-point. Dann tritt einer der folgenden beiden Fälle ein:

↳ 1. Fall: Es gibt ein $x \in \mathcal{U}$ mit $|x \cap u_n| < \omega$ für alle $n \in \omega$.

Für jedes $n \in \omega$ existiert ein $k_n \in \omega$ mit $(x \setminus k_n) \cap u_n = \emptyset$. Das heisst, $d(x) \leq 1/2^{n+1}$. Daher hat also x die Dichte 0. Das heisst, $d(\omega \setminus x) = 1$ und daher $\omega \setminus x \in \mathcal{U}$. Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, folgt $x \notin \mathcal{U}$. ↯

↳ 2. Fall: Es gibt ein $n_0 \in \omega$ mit $u_{n_0} \in \mathcal{U}$. Sei $x_0 = u_{n_0}$.

Wir partitionieren u_{n_0} in abzählbar viele Stücke $u_{n_0}^0, u_{n_0}^1, u_{n_0}^2, \ldots$ mit

$$d(u_{n_0}^k) = 2^{-(n+k+2)}.$$

Da $\mathcal{U}$ ein P-point ist, gibt es entweder ein $k \in \omega$ mit $u_{n_0}^k \in \mathcal{U}$ (dann sei $x_1 = u_{n_0}^k$) oder ein $x \in \mathcal{U}$ mit $|x \cap u_{n_0}^k| < \omega$ für jedes $k \in \omega$ (in diesem Fall argumentieren wir wie im Fall 1).

Ist $u_{n_0}^k \in \mathcal{U}$, so wiederholen wir das Verfahren. Entweder können wir irgendwann wie im Fall 1 argumentieren oder wir erhalten eine Folge

$$x_0 \supseteq x_1 \supseteq x_2 \supseteq \dots \supseteq x_n \supseteq \dots,$$

wobei $x_n \in \mathcal{U}$ ist für jedes $n \in \omega$ und

$$d(x_{n+1}) \leq \tfrac{1}{2} d(x_n)$$

für jedes $n \in \omega$. Weil $\mathcal{U}$ ein P-point ist, existiert ein $x \in \mathcal{U}$ mit

$$x \subseteq^* x_n$$

für jedes $n \in \omega$. Es gilt, da $x \subseteq^* x_n$, $d(x) = 0$. Da $d(\omega \setminus x) = 1$, folgt $\omega \setminus x \in \mathcal{U}$. Also wäre auch $\underbrace{x}_{\in \mathcal{U}} \cap \underbrace{(\omega \setminus x)}_{\in \mathcal{U}} = \emptyset$ in $\mathcal{U}$ ↯

Behauptung 2: $\mathcal{U}$ ist kein Q-point

Angenommen $\mathcal{U}$ ist ein Q-point. Wir betrachten folgende Partition von ω.
Für jedes $n \in \omega$ sei

$$I_n = [2^n - 1, 2^{n+1} - 1[$$

Die Menge $\{I_n \mid n \in \omega\}$ bildet eine Partition von ω. Da $\mathcal{U}$ ein Q-point ist, gibt es ein $x \in \mathcal{U}$ mit

$$\forall n \in \omega \, (|I_n \cap x| \leq 1).$$

Für jedes $m \in \omega$ sei $n_m \in \omega$ diejenige natürliche Zahl, für die $m \in I_{n_m} = [2^{n_m} - 1, 2^{n_m+1} - 1[$.
Bemerke, dass $n_m \to \infty$ wenn $m \to \infty$. Also erhalten wir

$$0 \leq d(x) = \lim_{m \to \infty} \frac{|x \cap m|}{m} \leq \lim_{m \to \infty} \frac{|x \cap (2^{n_m+1} - 1)|}{m} \leq \lim_{m \to \infty} \frac{|x \cap (2^{n_m+1} - 1)|}{2^{n_m} - 1} =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{|x \cap (I_0 \cup I_1 \cup \dots \cup I_{n_m})|}{2^{n_m} - 1} = \lim_{m \to \infty} \frac{|x \cap I_0| + |x \cap I_1| + \dots + |x \cap I_{n_m}|}{2^{n_m} - 1}$$

$$\leq \lim_{m \to \infty} \frac{n_m + 1}{2^{n_m} - 1} = 0.$$

Also folgt

$$d(\omega \setminus x) = \lim_{n \to \infty} \frac{|(\omega \setminus x) \cap n|}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{|n \setminus (x \cap n)|}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n - |x \cap n|}{n} =$$

$$= 1 - d(x) = 1.$$

Daher ist $\omega \setminus x \in \mathcal{U}$ und es folgt $x \notin \mathcal{U}$ ↯