

Axiomatische Mengenlehre - Serie 11 - Musterlösung

Aufgabe 31

- " $\omega_1 \leq \text{cov}(\mathcal{N})$ ": Angenommen $[0,1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$, wobei $\mu(L_n) = 0$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da das Lebesgue-Mass ein Mass ist, gilt

$$1 = \mu([0,1]) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(L_n) = 0 \quad \Leftarrow$$

Also ist $\text{cov}(\mathcal{N})$ überabzählbar.

- " $\text{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{c}$ ": Es gilt $[0,1] = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$. Da $\mu(\{x\}) = 0$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$, erhalten wir also $\text{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{c}$.

Aufgabe 32

Angenommen es gibt eine Antikette $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ mit $|\mathcal{A}| \geq \omega_1$. Für jedes $x \in \mathcal{A}$ sei $n_x \in \mathbb{N}$ minimal mit

$$\frac{1}{n_x} \leq \mu(x).$$

Da \mathcal{A} überabzählbar ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine überabzählbare Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ mit

$$\forall x \in \mathcal{B} \quad (0 < \frac{1}{n} \leq \mu(x)).$$

Da \mathcal{A} eine Antikette ist, gilt

$$\forall x, y \in \mathcal{A} \quad (x \neq y \Rightarrow \mu(x \cap y) = 0).$$

Das heisst also $\mu(\cup \mathcal{B}) = \infty$. Aber da $\cup \mathcal{B} \subseteq [0,1]$ ist, erhalten wir auch, dass

$$\mu(\cup \mathcal{B}) = \mu([0,1]) = 1$$

ist. Das ist der gesuchte Widerspruch.

Aufgabe 33

Sei $\mathcal{D} = \{D_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ eine Familie von Nullmengen mit $|\mathcal{D}| = \kappa < \mathfrak{c}$. Für jedes $\alpha \in \kappa$ sei

$$E_\alpha := \{x \in \mathcal{P} \mid x \cap D_\alpha = \emptyset\}.$$

Offenbar ist E_α offen. Zu zeigen bleibt also, dass E_α auch dicht ist.

Sei also $x \in \mathcal{P}$. Ist $x \in E_\alpha$, so sind wir fertig. Nehmen wir also an,

$$x \cap D_\alpha \neq \emptyset.$$

Da D_α eine Nullmenge ist, gilt $\mu(x \setminus D_\alpha) = \mu(x)$. Nach Folgerung

1.3.3 in Struwas Analysis III-Skript, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $y = x \setminus D_\alpha$ mit $\mu(y) \geq \mu(x) - \varepsilon$. Wählen wir $\varepsilon > 0$ klein genug, folgt also $0 < \mu(y)$. Also ist $y \in D_\alpha \cap P$.

Sei $\mathcal{E} := \{E_\alpha \mid \alpha \in K\}$. Nun wenden wir das Martin-Axiom an und finden einen ε -generischen Filter G . Der Schnitt $\bigcap G$ ist nicht leer. Warum? Angenommen $\bigcap G = \emptyset$. Die Menge

$$\mathcal{C} := \{[0, 1] \setminus x \mid x \in G\}$$

bildet also eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Da $[0, 1]$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. D.h. es gibt $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in G$ mit

$$\bigcap_{k \in n} x_k = \emptyset.$$

Da G aber "directed" ist, gibt es ein $y \in G$ mit

$$\forall k \in n \quad (x_k \leq y)$$

d.h. $\forall k \in n \quad (y \leq x_k)$. Also $\emptyset \neq y \leq \bigcap_{k \in n} x_k \neq \emptyset$. Das heisst, $\bigcap G \neq \emptyset$.

Da G ein ε -generischer Filter ist, schneidet G jedes E_α nicht trivial.

Also gilt $(\bigcap G) \cap D_\alpha \neq \emptyset$ für jedes $\alpha \in K$. Das heisst, $\bigcup D \neq [0, 1]$.

Aufgabe 34

Nach Aufgabe 31 gilt $\text{cov}(M) \leq a$ und nach Aufgabe 33 gilt $a \leq \text{cov}(M)$.

Also erhalten wir $\text{cov}(M) = a$.