Axiomatische Mengenlehre - Serie 1 - Musterlösung

Aufgabe 3a

Es gilt $\alpha \in x$ und $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\}$. Also ist $\alpha \in x \cap (\alpha \cup \{\alpha\})$ und daher ist

$$x \cap (\alpha \cup \{\alpha\}) \neq \emptyset.$$

Aufgabe 3b

Sei $\gamma \in x \cap (\alpha \cup \{\alpha\})$ ein $\in$-minimales Element. Das heisst,

$$\forall z\,(z \notin \gamma \vee z \notin x \cap (\alpha \cup \{\alpha\})). \qquad (1)$$

Zu zeigen ist: $\forall z\,(z \notin \gamma \vee z \notin x)$.

Sei also $z \in \gamma$. Dann gilt nach (1) $z \notin x \cap (\alpha \cup \{\alpha\})$. Nach Definition des Schnitts gilt also $z \notin x$ (da wären wir fertig) oder

$$z \notin \alpha \cup \{\alpha\}.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $z \in \alpha \cup \{\alpha\}$ ist. Wir haben

$$z \in \gamma \in \alpha \cup \{\alpha\}.$$

Im Buch "Combinatorial set Theory"

Wegen Theorem 3.12 (c) ist $\alpha \cup \{\alpha\}$ eine Ordinalzahl. Das heisst (Transitivität),

$$z \in \gamma \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}.$$

Somit ist $z \in \alpha \cup \{\alpha\}$ und wir sind fertig.

Aufgabe 4

Da $\emptyset \in \alpha$ ist, gilt $\emptyset \notin \beta \setminus \alpha$. Also ist $\beta \setminus \alpha = \emptyset$ nach Fact 3.10. Allerdings gilt nach Voraussetzung $\alpha \in \beta$ und nach Theorem 3.12 (a) $\alpha \notin \alpha$. Also ist

$$\alpha \in \beta \setminus \alpha.$$

Das heisst, $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$. Somit ist $\beta \setminus \alpha$ keine Ordinalzahl.

Aufgabe 5

Es gilt $\alpha \in \beta$, also $\{\alpha\} \subseteq \beta$. Weiter ist β eine Ordinalzahl, insbesondere also transitiv. Also gilt, da $\alpha \in \beta$ ist auch $\alpha \subseteq \beta$. Daraus folgt dann

$$\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta.$$

Aufgabe 6a

Sei $x \in \bigcup\alpha$. Das heisst, es gibt ein $\beta \in \alpha$ mit $x \in \beta \in \alpha$. Also gilt wegen der Transitivität der Ordinalzahl α auch $x \in \alpha$. Das heisst, $\bigcup\alpha \subseteq \alpha$.

Aufgabe 6b

Siehe Aufgabe 8.

Aufgabe 6c

Nach Fact 3.10 gilt $\alpha = \emptyset$ oder $\emptyset \in \alpha$. In beiden Fällen gilt $\bigcap\alpha = \emptyset$.

Aufgabe 7

Folgt direkt aus Aufgabe 8. (Setze $x = \beta \backslash \alpha$ resp. $x = \{\alpha, \beta\}$.

Aufgabe 8

OBdA nehmen wir an, $\bigcup x \neq \emptyset$ und $\bigcap x \neq \emptyset$.

"$\bigcup x \in \Omega$": Transitivität: Sei $\alpha \in \beta \in \bigcup x$. Nach Definition der Vereinigung gibt es ein $y \in x$ mit $\beta \in y \in x$. Da y nach Voraussetzung eine Ordinalzahl ist, erhalten wir

$$\alpha \in y \in x$$

Das heisst, $\alpha \in \bigcup x$.

Wohlgeordnet: Sei $\alpha \in \bigcup x$ Das heisst, es gibt eine Ordinalzahl $y \in x$ mit $\alpha \in y \in \Omega$ Nach Theorem 3.12 (a) folgt, dass $\alpha \in \Omega$ ist. Das heisst, $\bigcup x$ ist eine Menge von Ordinalzahlen. Mit Theorem 3.12 (c) folgt, dass $\bigcup x$ $\in$-wohlgeordnet ist.

"$\bigcap x \in \Omega$": Die Beweise gehen analog.