Axiomatische Mengenlehre - Serie 7 - Musterlösung

Aufgabe 19

Wir beweisen indirekt und nehmen an, $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in \omega\}$ ist eine abzählbare splitting family. Wir konstruieren induktiv eine Menge y, die von keinem Element aus $\mathcal{S}$ gesplittet wird. Sei

$$A_0 := S_0$$

und für jedes $n \in \omega \setminus \{\emptyset\}$ sei

$$A_n := \begin{cases} A_{n-1} \cap S_n, & \text{wenn } |A_{n-1} \cap S_n| = \omega \\ A_{n-1} \setminus S_n, & \text{wenn } |A_{n-1} \setminus S_n| = \omega \wedge |A_{n-1} \cap S_n| < \omega \end{cases}$$

Da $(A_{n-1} \cap S_n) \cup (A_{n-1} \setminus S_n) = A_{n-1}$ und $|A_{n-1}| = \omega$ ist, tritt einer der obigen beiden Fälle ein. Für jedes $n \in \omega$ wähle

$$a_n \in A_n \setminus \{a_k \mid k \in n\}.$$

Sei $y := \{a_n \mid n \in \omega\}$. Es gilt für jedes $n \in \omega$

$$y \setminus \{a_k \mid k \in n\} \subseteq A_n$$

und $A_n \subseteq S_n$ oder $A_n \subseteq \omega \setminus S_n$. Also wird y von keinem Element aus $\mathcal{S}$ gesplittet und somit ist $\mathcal{S}$ keine splitting family.

Aufgabe 20a ($\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t}$)

Wir zeigen, dass jeder tower die strong finite intersection property (sfip) hat aber keinen unendlichen Pseudodurchschnitt. Damit ist dann auch $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t}$ gezeigt.

Sei also $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$ ein tower. Nach Definition hat $\mathcal{T}$ keinen unendlichen Pseudodurchschnitt. Sei nun

$$\{A_0, A_1, \dots, A_n\} \in \operatorname{fin}(\mathcal{T}).$$

OBdA gilt

$$A_0 \overset{*}{\supseteq} A_1 \overset{*}{\supseteq} \dots \overset{*}{\supseteq} A_n.$$

Das heisst, für jedes $0 < k \leq n$ existiert ein $a_k \in \operatorname{fin}(\omega)$ mit

$$A_{k-1} \supseteq A_k \setminus a_k.$$

Also folgt, dass

$$A_n \setminus (a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n) \subseteq A_\ell$$

ist für jedes $0 \leq \ell \leq n$. D.h. $\mathcal{T}$ erfüllt auch sfip.

Aufgabe 20b ($t \leq s$)

Wir zeigen dies indirekt und nehmen an, es gibt eine splitting family

$$\mathcal{S} = \{S_\alpha \mid \alpha \in \kappa+1\}$$

wobei $\kappa < t$. (Bemerke: $|\mathcal{S}| = \kappa$). Für jedes $\alpha \in \kappa+1$ wählen wir T_α mit

(1) $\forall \beta \in \alpha \, (T_\alpha \subseteq^* T_\beta)$

(2) $T_\alpha \subseteq S_\alpha$ oder $T_\alpha \subseteq \omega \setminus S_\alpha$.

Warum können wir T_α so wählen? Die Menge $\{T_\beta \mid \beta \in \alpha\}$ erfüllt

$$|\{T_\beta \mid \beta \in \alpha\}| \leq \kappa < t = t_1$$

siehe später für Def von t_1 und Beweis warum $t = t_1$.

Also besitzt diese Menge einen unendlichen Pseudodurchschnitt A. Ist $A \cap S_\alpha$ unendlich, sei $T_\alpha := A \cap S_\alpha$. Ansonsten ist $A \setminus S_\alpha$ unendlich und wir wählen $T_\alpha := A \setminus S_\alpha$.

Für jedes $S \in \mathcal{S}$ gilt

$$T_\kappa \subseteq^* S \text{ oder } T_\kappa \subseteq^* \omega \setminus S.$$

Somit ist $\mathcal{S}$ keine splitting family und es folgt $t \leq s$.

Aufgabe 20c ($t \leq b$)

Nehmen wir an, $\mathcal{B} = \{b_\alpha \mid \alpha \in \kappa+1\} \subseteq {}^\omega\omega$ ist eine unbounded family der Kardinalität $\kappa < t$. Für jedes $\alpha \in \kappa+1$ können wir eine streng monoton wachsende Funktion $f_\alpha \in {}^\omega\omega$ wählen mit

(1) $\forall \beta \in \alpha \, (\mathrm{im}(f_\alpha) \subseteq^* \mathrm{im}(f_\beta))$

(2) $\forall n \in \omega \, (f_\alpha(n) \geq \max\{b_\alpha(k) \mid k \leq 2n\})$.

Warum können wir $f_\alpha \in {}^\omega\omega$ so wählen? Wie in Teilaufgabe b gibt es einen unendlichen Pseudodurchschnitt A von $\{\mathrm{im}(f_\beta) \mid \beta \in \alpha\}$. Für jedes $n \in \omega$ sei

$$f_\alpha(n) := \min\{a \in A \mid \forall k \leq 2n \, (b_\alpha(k) \leq a)\}.$$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass für jedes $\alpha \in \kappa+1$ gilt

$$b_\alpha \leq^* f_\kappa$$

das heisst, dass $\mathcal{B}$ nicht unbounded ist.

Sei also $\alpha \in \kappa$. Da f_κ streng monoton wachsend, also insbesondere injektiv ist und $\mathrm{im}(f_\kappa) \subseteq^* \mathrm{im}(f_\alpha)$ ist, existiert ein $m \in \omega$ mit

$$\forall n \in \omega \ (f_\kappa(m+n) \in \mathrm{im}(f_\alpha)).$$

Und ausserdem gilt

$$\forall n \in \omega \ (f_\kappa(m+n) \geq f_\alpha(n)). \qquad (*)$$

Es folgt also für alle $n \geq 2m$

$$f_\kappa(n) = f_\kappa(n-m+m) \overset{(*)}{\geq} f_\alpha(n-m) \overset{(2)}{\geq} b_\alpha(n).$$

Also $f_\kappa \geq^* b_\alpha$.

<u>Warum $t = t_1$ ist</u>

<u>Def:</u> $t_1 = \min \{ \kappa \mid \exists T : \kappa \to [\omega]^\omega \ (\forall \alpha, \beta \in \kappa \ (\beta \in \alpha \Rightarrow T_\alpha \subseteq^* T_\beta))$ und $\mathrm{im}(T)$ hat keinen unendlichen Pseudodurchschnitt $\}$

<u>Lemma:</u> $t = t_1$

"$t_1 \leq t$" ✓

"$t_1 \geq t$": Sei $T : \kappa \to [\omega]^\omega$, sodass $\mathrm{im}(T)$ keinen unendlichen Pseudodurchschnitt hat, $\kappa < t$ und

$$\forall \alpha, \beta \in \kappa \ (\beta \in \alpha \Rightarrow T_\alpha \subseteq^* T_\beta)$$

gilt. Sei

$$I := \{ \alpha \in \kappa \mid \exists \beta \in \alpha \ (T_\beta \subseteq^* T_\alpha) \}$$

Dann ist $\mathrm{im}(T|_{\kappa \setminus I})$ durch "$\overset{*}{\supseteq}$" wohlgeordnet und da $\kappa < t$, hat $\mathrm{im}(T|_{\kappa \setminus I})$ einen unendlichen Pseudodurchschnitt, sagen wir A.

Sei nun $\alpha \in \kappa$. Ist $\alpha \in \kappa \setminus I$, so gilt

$$A \subseteq^* T_\alpha.$$

Ansonsten ist $\alpha \in I$ und es gibt ein $\beta_0 \in \alpha$ mit $T_{\beta_0} \subseteq^* T_\alpha$.

Ist $\beta_0 \in \kappa \setminus I$, gilt

$$A \subseteq^* T_{\beta_0} \subseteq^* T_\alpha \Rightarrow A \subseteq T_\alpha.$$

Ansonsten gilt $\exists \beta_1 \in \beta_0 \ (T_{\beta_1} \subseteq^* T_{\beta_0})$. Ist $\beta_1 \in \kappa \setminus I$ sind wir fertig ansonsten finden wir $\beta_2 \in \beta_1$, etc..

Allerdings kann das nicht unendlich lange weiter gehen wegen dem Fundierungsaxiom. Also ist A ein Pseudodurchschnitt von $\mathrm{im}(T)$ ↯