Axiomatische Mengenlehre – Serie 12 – Musterlösung

35. (a) $\omega_1 \leq \mathrm{add}(\mathcal{M})$: Sei $\{M_n : n \in \omega\}$ eine abz. Menge magerer Mengen. Für jedes $n\in\omega$ ex. abz. viele nirgends dichte Mengen

$$N_{n,0}, N_{n,1}, \dots, N_{n,k}, \dots$$

mit $\bigcup_{k\in\omega} N_{n,k} = M_n$. Dann gilt $\bigcup_{n\in\omega} M_n = \bigcup_{n\in\omega}\bigcup_{k\in\omega} N_{n,k}$,

d.h. $\bigcup_{n\in\omega} M_n$ ist eine abz. Vereinigung nirgends dichter Mengen und somit mager. Somit gilt $\omega_1 \leq \mathrm{add}(\mathcal{M})$.

$\mathrm{add}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{c}$: Sei $\mathcal{F} := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$. Dann ist $\bigcup\mathcal{F} = \mathbb{R}$, wobei $\{x\}$ nirgends dicht, also mager, ist.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ nicht mager ist:

Annahme: $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\omega} N_k$, wobei N_k nirgends dicht ist.

Sei $D_k := \mathbb{R}\setminus N_k$, so enthält D_k eine offen dichte Teilmenge D_k'. Sei $r_0 \in D_0'$ und sei (a_0, b_0) so, dass $a_0 < r < b_0$ und $(a_0, b_0) \subseteq D_0'$. Allgemein sei $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$, sodass $(a_{n+1}, b_{n+1}) \subseteq D_{n+1}'$. Dann ex. r_∞ mit $a_k \leq r_\infty \leq b_k$ (für alle $k\in\omega$), d.h. $r_\infty \notin \bigcup_{k\in\omega} N_k$ und somit ist $\mathbb{R} \neq \bigcup_{k\in\omega} N_k$.

Daraus folgt dass $\bigcup\mathcal{F} = \mathbb{R}$ nicht mager ist, d.h. $\mathrm{add}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{c}$.

(b) $(P,\leq)$ ist σ-centred: Wir müssen P schreiben als abz. Vereinigung von centred Mengen. Da $|\mathrm{fin}(\omega)| = \omega$ ex. nur abz. viele Mengen $\bigcup_{k\in K} O_k$ für $K \in \mathrm{fin}(\omega)$, und damit ex. nur abz. viele endliche Folgen

$$S = \langle Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}\rangle.$$

Sei $P_S := \{p \in P : \mathrm{dom}(p) = n \wedge \forall i \in n\, (p_i(0) = Q_i)\}$.

Wir zeigen, dass P_S centred ist: Seien $p^0, p^1, \dots, p^{k-1} \in P_S$.
Für jedes $i \in n$ definieren wir

$$F_i := \bigcup_{\ell \in k} \underbrace{(p^\ell)_i(1)}_{\text{das ist die zweite Komponente von } p^\ell \text{ an der Stelle } i} \quad ; \text{ dann ist } Q_i \subseteq \bigcap_{\alpha \in F_i} U_\alpha$$

Sei $p^k := \langle\langle Q_0, F_0\rangle, \langle Q_1, F_1\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle\rangle$.
Dann ist $p^k \geq p^\ell$ für alle $\ell \in k$, d.h. P_S ist centred.

(c) D_α offen dicht: · offen ist klar

· Für $p = \langle\langle Q_0, F_0\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle\rangle \in P$ und $\alpha \in \kappa$
sei $\tilde{p} = \langle\langle Q_0, F_0\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle, \langle U_\alpha, \{\alpha\}\rangle\rangle$.
Dann ist $\tilde{p} \in P$, $\tilde{p} \geq p$ und $\tilde{p} \in D_\alpha$, d.h. D_α ist dicht.

(d) $E_{i,k}$ offen dicht: · offen ist klar

· Sei $p \in P$. Wir nehmen an, $i \in \mathrm{dom}(p)$, sonst erweitern wir p.

$$p = \langle\langle Q_0, F_0\rangle, \dots, \underbrace{\langle Q_i, F_i\rangle}_{Q_i \subseteq \bigcap_{\alpha \in F_i} U_\alpha = W \text{ offen dicht}}, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle\rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{W \cap O_k}_{\text{offen}} \neq \emptyset$$

; sei $O_\ell \subseteq W \cap O_k$ für ein $\ell \in \omega$.

Dann ist

$$\tilde{p} = \langle\langle Q_0, F_0\rangle, \dots, \langle Q_i \cup O_\ell, F_i\rangle, \dots \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle\rangle \geq p$$

und $\tilde{p} \in E_{i,k}$, d.h. $E_{i,k}$ ist dicht für alle $i, k \in \omega$.

(e) $\bigcap_{n \in \omega} V_n \subseteq \bigcap_{\alpha \in \kappa} U_\alpha$: Sei $x \in \bigcap_{n \in \omega} V_n$ und sei $\alpha \in \kappa$. Ziel ist es zu zeigen, dass $x \in U_\alpha$ ist.

Sei $p = \langle\langle Q_0, F_0\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle\rangle \in G \cap D_\alpha$.
D.h. es ex. $i \in n$ mit $\alpha \in F_i$. Weiter ist $Q_i \subseteq \bigcap_{\beta \in F_i} U_\beta \subseteq U_\alpha$.
Sei $q \in G$. Da G directed ist ex. ein $r \in G$ mit $p \leq r \geq q$.
D.h. $q_i(0) \subseteq \underbrace{r_i(0)}_{\subseteq \bigcap_{\beta \in r_i(1)} U_\beta \subseteq U_\alpha \text{ (weil } \alpha \in p_i(1))} \supseteq p_i(0)$; und somit ist $V_i \subseteq U_\alpha$, d.h.

$x \in \bigcap_{n \in \omega} V_n \Rightarrow x \in U_\alpha$.

(f) MA(σ-centred) $\Rightarrow$ add($\mathcal{M}$) = $\mathfrak{c}$: Sei $\mathcal{F} := \{N_\alpha : \alpha \in \kappa < \mathfrak{c}\}$ eine Familie von nirgends dichten Mengen. Wir zeigen, dass $\bigcup \mathcal{F}$ mager ist; daraus folgt dann, weil magere Mengen die Vereinigung von abz. vielen dichten Mengen ist, dass add($\mathcal{M}$) $> \kappa$ sein muss, d.h. add($\mathcal{M}$) = $\mathfrak{c}$.

- Für jedes $\alpha \in \kappa$ sei $U_\alpha := \mathbb{R} \setminus \overline{N_\alpha}$ mit $\overline{N_\alpha}$ Abschluss von N_α. Dann ist U_α offen dicht für jedes $\alpha \in \kappa$.

- Mit MA(σ-centred) und (e) ex. Mengen V_n ($n \in \omega$) mit $\bigcap_{n \in \omega} V_n \subseteq \bigcap_{\alpha \in \kappa} U_\alpha$.

- Beachte, dass die V_n's, als Vereinigung offener Mengen, offen sind, und weil G mit jedem $E_{i,n}$ einen nicht-leeren Durchschnitt hat, sind die V_n's auch dicht (in $\mathbb{R}$).

- Wir erhalten somit:

$$\bigcup_{\alpha \in \kappa} N_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in \kappa} \overline{N_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in \kappa} (\mathbb{R} \setminus U_\alpha) = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{\alpha \in \kappa} U_\alpha$$

$$\subseteq \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \omega} V_n = \underbrace{\bigcup_{n \in \omega} \underbrace{(\mathbb{R} \setminus V_n)}_{\text{abgeschl., nirgends dicht}}}_{\text{mager}}$$

Somit ist $\bigcup_{\alpha \in \kappa} N_\alpha$ in einer mageren Menge enthalten und daher mager.

(g) In der Serie 6, Aufgabe 18 wurde die Existenz einer "magic set" unter CH bewiesen. Dabei wurde nur add($\mathcal{M}$) = $\mathfrak{c}$ gebraucht, was unter CH gilt – aber, wie wir in (f) gezeigt haben, auch unter MA(σ-centred) gilt.