Axiomatische Mengenlehre   Serie 9

Eigenschaften von Ultrafiltern   Besprechung am 30. November

---

24. Sei $S \neq \emptyset$ eine Menge.

Zeige, zum Beispiel mit dem Teichmüller Prinzip, dass sich jeder Filter $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(S)$ zu einem Ultrafilter $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(S)$ erweitern lässt.

Beweis. Sei P die Menge aller Teilmengen A von $\mathscr{P}(\omega)$ sodass für alle $n \in \omega$, $\{a_i | \, i < n\} \subseteq A$ und $c \in \mathscr{F}$ gilt $\bigcap_{i<n} a_i \cap c \neq \emptyset$. Dies hat endlichen Charakter da nur endliche Teilmengen von A betrachtet werden. Also gibt es nach dem Teichmüllerprinzip ein $\subseteq$-maximales Element $\mathscr{U}$ in P. Es gilt $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{U}$ da $\mathscr{F} \cup \mathscr{U} \in P$. Aus dem selben Grund auch sind auch Schnitte und Obermengen von Elementen wieder Elemente, also ist $\mathscr{U}$ ein Filter. Angenommen $\mathscr{U}$ ist kein Ultrafilter, dann existiert $A \subseteq \omega$ mit $A \notin \mathscr{U}$ und $\omega \setminus A \notin \mathscr{U}$. Das heißt es existieren $\{a_i | \, i < n_0\}, \{b_i | \, i < n_1\} \subseteq \mathscr{U}$ sodass $\bigcap_{i<n_0} a_i \cap A = \emptyset$ und $\bigcap_{i<n_1} b_i \cap (\omega \setminus A) = \emptyset$, wir können das $c \in \mathscr{F}$ vergessen, da wir bereits wissen das $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{U}$. Aber nun $\bigcap_{i<n_0} a_i \cap \bigcap_{i<n_1} b_i = \emptyset$, im Widerspruch dazu das $\mathscr{U} \in P$. Also ist $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter. ⊣

25. Zeige, dass es $2^{\mathfrak{c}}$ paarweise verschiedene Ultrafilter $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ gibt.

Hinweis: Verwende eine *independent family* der Kardinalität $\mathfrak{c}$.

Beweis. Sei $\mathscr{I}$ eine independent family der Kardinalität $\mathfrak{c}$. Für $f \colon \mathscr{I} \to 2$ definiere

$$\mathscr{F}_f = \left\{ X \subseteq \omega \,\middle|\, \exists \mathscr{I}' \subseteq \mathscr{I} \text{ endlich} \left(X \supseteq \bigcap_{I \in \mathscr{I}', f(I)=0} I \cap \bigcap_{I \in \mathscr{I}', f(I)=1} (\omega \setminus I) \right) \right\}.$$

Dies ist ein Filter also gibt es einen Ultrafilter $\mathscr{U} \supseteq \mathscr{F}$. Seien $f \neq g$ zwei solche Funktionen. Dann existiert ohne Beschränkung der Allgemeinheit $I \in \mathscr{I}$ mit $f(I) = 0$ und $g(I) = 1$. Damit ist $I \in \mathscr{U}_f$ und $(\omega \setminus I) \in \mathscr{U}_g$. Also $\mathscr{U}_f \neq \mathscr{U}_g$. Heißt für jede solche Funktion gibt es einen anderen Ultrafilter und es gibt $2^{\mathfrak{c}}$ viele solche Funktionen. ⊣

26. Für $x \in [\omega]^\omega$ sei $f_x : \omega \to x$ die aufsteigende Abzählung von x, *d.h.* f_x ist eine surjektive, streng monoton wachsende Funktion und für alle $k \in \omega$ gilt:

$$\left| x \cap f_x(k) \right| = k$$

(a) Zeige: Ist $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Ultrafilter, so ist $\{f_x : x \in \mathscr{U}\}$ eine "unbounded family".

Beweis. Falls es keine unbounded family ist gibt es $g \in \omega^\omega$ mit $f_x <^* g$ für alle $x \in \mathscr{U}$. Definiere $f \in \omega^\omega$ mit

$$f(0) = \max(g(0), 1)$$

$$f(n) = f(n-1) + g(f(n-1)).$$

Sei $x_0 = [0, f(0))$ und $x_n = [f(n-1), f(n))$. Sei $x = \bigcup_{n\in\omega} x_{2n}$ und $y = \bigcup_{n\in\omega} x_{2n+1}$. Dann $x \in \mathscr{U}$ oder $y \in \mathscr{U}$.
Angenommen $x \in \mathscr{U}$. Der andere Fall funktioniert exakt genau so es wird nur $2n$ durch $2n+1$ ersetzt. Sei $n \in \omega$. Da f_x streng monoton wachsend ist gilt $f_x(f(2n)) \geq f(2n)$. Aber $x \cap [f(2n), f(2n+1)) = \emptyset$, also sogar $f_x(f(2n)) \geq f(2n+1)$. Dann

$$f_x(f(2n)) \geq f(2n+1) = f(2n) + g(f(2n)) > g(f(2n)).$$

Also $f_x \not\leq^* g$, ein Widerspruch. $\dashv$

(b) Zeige: Ist $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Q-point, so ist $\{f_x : x \in \mathscr{U}\}$ eine “dominating family”.

Beweis. Sei $g \in \omega^\omega$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist g streng monoton wachsend und $g(0) = 0$. Sei $u_n = [g(n), g(n+1))$. Da $\mathscr{U}$ ein Q-point ist gibt es $x \in \mathscr{U}$ mit $|x \cap u_n| \leq 1$ für alle $n \in \omega$. Dann gilt $f_x(n) \geq \min u_n = g(n)$. Also $f_x \geq^* g$, heißt es ist eine dominating family. $\dashv$

27. Eine Familie $\mathscr{B} \subseteq [\omega]^\omega$ ist eine *Basis für einen nicht-Hauptultrafilter* $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$, falls gilt:

$$\mathscr{U} = \{y \in [\omega]^\omega : \exists x \in \mathscr{B}(x \subseteq y)\}$$

Sei $\mathfrak{u}$ die kleinste Kardinalität einer Basis für einen nicht-Hauptultrafilter, *d.h.*,

$$\mathfrak{u} := \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subseteq [\omega]^\omega \textit{ ist eine Basis für einen nicht-Hauptultrafilter}\}.$$

Zeige: $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{u}$.

Beweis. Sei $\mathscr{B}$ eine Basis für den nicht-Hauptultrafilter $\mathscr{U}$. Wir zeigen das $\mathscr{B}$ eine reaping family ist. Sei $x \in [\omega^\omega]$. Dann gilt $x \in \mathscr{U}$ oder $\omega \setminus x \in \mathscr{U}$. Also existiert $y \in \mathscr{B}$ sodass $y \subseteq x$ oder $y \subseteq \omega \setminus x$. Im einen Fall ist $y \setminus x$ endlich und im anderen Fall ist $y \cap x$ endlich. Also ist $\mathscr{B}$ eine reaping family. $\dashv$