Axiomatische Mengenlehre   Serie 5

zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ Besprechung am 2. November

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ werden üblicherweise aus $\mathbb{Q}$ mit Hilfe von Dedekind'schen Schnitten (oder Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen) definiert. Weiter lässt sich zeigen (z.B. mit Hilfe von Kettenbrüchen), dass gilt $|\mathbb{R}| = |\mathscr{P}(\omega)|$. Die Kardinalität $|\mathbb{R}|$ wird mit $\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}$ für Continuum) oder mit $2^{\aleph_0}$ bezeichnet. Insbesondere ist mit dem SATZ VON CANTOR die Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ überabzählbar.

15. Bestimme die Kardinalität der Menge der

(a) Funktionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
(b) Funktionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$,
(c) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
(d) stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beweis. (a) Da $|\mathbb{Q}| = \omega$, gilt $|\{f|\ f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\}| = \omega^{\omega} = 2^{\omega}$.

(b) $|\{f|\ f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\}| = (2^{\omega})^{\omega} = 2^{\omega * \omega} = 2^{\omega}$.

(c) $|\{f|\ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}| = (2^{\omega})^{(2^{\omega})} = 2^{(2^{\omega})} > 2^{\omega}$.

(d) $|\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}|\ f \text{ stetig}\}| = 2^{\omega}$. Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig betrachte $f \restriction \mathbb{Q}\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Falls $f \restriction \mathbb{Q} = g \restriction \mathbb{Q}$ so auch $f = g$, da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = \lim f(q_n) = \lim g(q_n) = g(x)$, wobei $(q_n)_{n\in\omega}$ eine Sequenz von Rationalen Zahlen ist die gegen x konvergiert. Deshalb gibt es maximal so viele stetige Funktionen wie Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$, andererseits gibt es mindestens 2^{ω} viele stetige Funktionen, da die Konstanten Funktionen stetig sind.

$\dashv$

16. Sei V der Vektorraum $\mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$

Zeige mit Hilfe des Auswahlaxioms, dass es eine lineare Funktion $f : V \to V$ gibt, welche nirgends stetig ist.

Beweis. Aufgrund von Zorn's Lemma gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$. Um dies zu sehen genügt es zu wissen das Basen maximale linear unabhängige Mengen sind und die Vereinigung einer Kette von linear unabhängigen Mengen linear unabhängig ist. Außerdem muss $\mathcal{B}$ Kardinalität größer als ω haben. Also finden wir eine Menge von verschiedenen Elementen $\{b_n|\ n \in \omega\} \subsetneq \mathcal{B}$. Sei $f\colon V \to V$ die lineare Fortsetzung von $b_n \mapsto nb_n$, für $n \in \omega$, und $b \mapsto 0$, für $b \in \mathcal{B} \setminus \{b_n|\ n \in \omega\}$. Wir wollen zeigen das f nirgends stetig ist. Angenommen f wäre an x stetig.

Fall $f(x) = 0$: Dann existiert $a < x < c$ sodass $f(y) < 1$ für alle $y \in (a, c)$. Sei $n > \frac{1}{a}$. Da $\mathbb{Q}$ dicht ist existiert $q \in \mathbb{Q}$ sodass $qb_n \in (a, c)$. Dann $f(qb_n) = qf(b_n) = qnb_n > an > 1$, Widerspruch.

Fall $f(x) \neq 0$: Dann existiert $a < x < c$ sodass $f(y) \neq 0$ für alle $y \in (a, c)$. Es gibt $b \in \mathcal{B} \setminus \{b_n|\ n \in \omega\}$ und $q \in \mathbb{Q}$ sodass $qb_n \in (a, c)$, aber dann $f(qb_n) = 0$, Widerspruch.

$\dashv$

Aufgabe 17 a)

Wir definieren

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1/q & \text{wenn } x = p/q \text{ mit } q \in \omega, p \in \mathbb{Z} \text{ und } ggT(p,q) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung 1: f ist unstetig bei jedem $x_0 \in \mathbb{Q}$.

Beweis (Beh 1) Sei $x_0 \in \mathbb{Q}$ und für jedes $n \in \omega$ sei $y_n := x_0 + \pi/n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0 + \lim_{n\to\infty} \pi/n = x_0$ aber $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0 \neq f(x_0)$. Nach dem Folgenkriterium für die Stetigkeit ist f bei x_0 also nicht stetig.

Behauptung 2 f ist stetig bei jedem $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Beweis (Beh 2). Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wir benutzen das ε-δ-Kriterium für den Nachweis der Stetigkeit. Sei also $\varepsilon > 0$. In jedem Intervall I (mit endlicher Länge) um x_0 herum gibt es nur endlich viele Punkte $x \in I \cap \mathbb{Q}$ mit $x = p_x/q_x$, $p_x \in \mathbb{Z}$, $q_x \in \omega$, $ggT(p_x, q_x) = 1$ mit $q_x \leq 1/\varepsilon$. Wir können also $\delta = \delta(\varepsilon)$ so wählen, dass für jedes $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ gilt

$$q_x > 1/\varepsilon.$$

Wir haben also

$$\forall x \, (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \overbrace{f(x_0)}^{=0}| = |f(x)| = |1/q_x| < \varepsilon).$$

Somit ist f stetig bei x_0.

Aufgabe 17 b)

Für jede Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jedes $a \in \mathbb{R}$ und alle $\delta > 0$ definieren wir

$$B_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[$$

$$osc_{B_\delta(a)} f := \sup_{x \in B_\delta(a)} f(x) - \inf_{x \in B_\delta(a)} f(x)$$

$$osc_f(a) := \inf_{\delta > 0} osc_{B_\delta(a)} f.$$

Behauptung 1: Die Menge aller Unstetigkeitspunkte S von f ist eine Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen.

Beweis (Beh 1): Es gilt

$$S = \{a \in \mathbb{R} \mid osc_f(a) > 0\}$$

$$= \{a \in \mathbb{R} \mid \exists \varepsilon > 0 \, (\operatorname{osc}_f(a) \geq \varepsilon)\}$$

$$= \bigcup_{\varepsilon > 0} \{a \in \mathbb{R} \mid \operatorname{osc}_f(a) \geq \varepsilon\}$$

$$= \bigcup_{n \in \omega} \underbrace{\{a \in \mathbb{R} \mid \operatorname{osc}_f(a) \geq 1/n\}}_{=: A_n}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass A_n abgeschlossen ist, respektive äquivalent dazu, dass $A_n^c = \{a \in \mathbb{R} \mid \operatorname{osc}_f(a) < 1/n\}$ offen ist. Ist $a \in A_n^c$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $\operatorname{osc}_{B_\delta(a)} f < 1/n$. Das heisst, $B_\delta(a) \subseteq A_n^c$. Also ist A_n^c offen.

Behauptung 2: Seien A_n, $n \in \omega$ abgeschlossene Mengen, sodass

$$\operatorname{int}\left(\bigcup_{n \in \omega} A_n\right) \neq \emptyset$$

ist. Dann gibt es ein $n \in \omega$ mit $\operatorname{int}(A_n) \neq \emptyset$.

• Bemerkung: Diese Behauptung gilt in allen vollständigen, metrischen Räumen. Die Behauptung ist eine Version des Satzes von Baire.

Beweis (Beh 2): Sei $B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_n$. Wir beweisen indirekt und nehmen an,

$$\forall \delta > 0 \; \forall y \in \mathbb{R} \; \forall n \in \omega \; (B_\delta(y) \cap (\mathbb{R} \setminus A_n) \neq \emptyset). \qquad (*)$$

Da A_0 abgeschlossen ist, ist $\mathbb{R} \setminus A_0$ offen und es gibt $0 < \varepsilon_0 < 1$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)} \subseteq B_{2\varepsilon_0}(x_0) \subseteq \underbrace{B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus A_n)}_{\neq \emptyset \text{ (wegen } *) \text{ und offen}}$$

Sei $n > 0$. Angenommen $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ sind bereits bestimmt. Dann gibt es $0 < \varepsilon_n < 1/2^n$ und $x_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)} \subseteq B_{2\varepsilon_n}(x_n) \subseteq \underbrace{B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \cap (\mathbb{R} \setminus A_n)}_{\neq \emptyset \text{ (wegen } *) \text{ und offen}}.$$

Es gilt

$$|x_j - x_k| \leq \varepsilon_k < 2^{-k} \to 0 \quad (j \geq k \to \infty)$$

Also ist $(x_k)_{k \in \omega}$ eine Cauchyfolge und da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert

$$x^* = \lim_{n \to \infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$x^* \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)} \subseteq \bigcap_{n \in \omega} (\mathbb{R} \setminus A_n) = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n \in \omega} A_n\right) \Rightarrow x^* \notin \bigcup_{n \in \omega} A_n$$

Weiter gilt

$$x^* \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)} \subseteq \overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)} \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_n \; \lightning$$

Behauptung 3: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist keine Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen.

Beweis (Beh. 3): Sei $\mathbb{Q} = \{q_k \mid k\in\omega\}$. Weiter nehmen wir an, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, wobei jedes A_n abgeschlossen ist. Dann ist

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\omega} A_n \cup \bigcup_{k\in\omega} \{q_k\}.$$

Da $\mathrm{int}(\{q_k\}) = \emptyset$ ist für jedes $k\in\omega$, gibt es nach Beh. 2 ein $n\in\omega$ mit $\mathrm{int}(A_n) \neq \emptyset$. Aber $\mathrm{int}(A_n) \subseteq \mathrm{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$ ↯.

Behauptung 1 zusammen mit Behauptung 3 ergibt, dass es keine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gibt, welche auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ unstetig ist und auf $\mathbb{Q}$ stetig.

Aufgabe 13a

"$\subseteq$" Sei $a\in A_0$. Ist $a\in D = \bigcap_{n\in\omega} A_n$, so sind wir fertig. Nehmen wir also an, $a\notin D$. Sei $m\in\omega$ kleinst möglich mit

$$a\notin A_m. \quad (\text{Bemerke, } m\neq 0)$$

Dann ist $a\in A_{m-1}\setminus B_{m-1}$, wenn $a\notin B_{m-1}$ und $a\in B_{m-1}\setminus A_m$, wenn $a\in B_{m-1}$ ist.

Also folgt "$\subseteq$".

"$\supseteq$" Sei $n\in\omega$. Es gilt nach Definition $A_n\subseteq A = A_0$ und $B_n\subseteq A = A_0$. Ausserdem ist $D = \bigcap_{n\in\omega} A_n \subseteq A_0$. Also folgt auch "$\supseteq$".

Aufgabe 13b

Es gilt $B_0 = A_0\setminus(A_0\setminus B_0)$. Da die Vereinigung in (a) auf der rechten Seite disjunkt ist, folgt (b) also aus (a).

Aufgabe 13c

Wir zeigen, dass die Funktion

$$h_n = g\circ f|_{A_n\setminus B_n} \quad A_n\setminus B_n \to A_{n+1}\setminus B_{n+1}$$
$$x \mapsto (g\circ f)(x)$$

bijektiv ist.

Die Funktion h ist injektiv, da g und f injektiv sind. Ausserdem gilt

$$h[A_n\setminus B_n] = h[A_n]\cap h[B_n{}^c] \underset{h \text{ injektiv}}{=} A_{n+1}\cap h[B_n]^c = A_{n+1}\cap B_{n+1}{}^c = A_{n+1}\setminus B_{n+1}.$$