1 AXIOME DER MENGENLEHRE

[· Warum Axiome? naive Mengenlehre von Cantor führt zu Widersprüchen.
· Was ist eine Menge? was ist eine reelle Zahl? math. Objekte gibt es nicht.]

[· nochmals zu den Axiomen:
ML als Grundlage der Math. vs. ML als math. Gebiet
"es gibt richtige Axiome" "versch. Arten von ML"
ZF, ZFC, ZF+MA, ...]

Die Signatur der Mengenlehre ist $\mathcal{L} = \{\in\}$, wobei $\in$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

0 Axiom der leeren Menge

$$\exists x \, \forall z \, (z \notin x) \quad \text{wobei } z \notin x :\Longleftrightarrow \neg (z \in x)$$

[Kann auch weggelassen werden]

1 Extensionalitätsaxiom

[Extension eines Begriffs: Gesamtheit der Dinge, die unter diesen Begriff fallen (Aristoteles)]

$$\forall x \forall y \, (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Folgerung: Die leere Menge ist eindeutig.

$$\exists! x \, \varphi(x) :\Longleftrightarrow \exists x \, (\varphi(x) \wedge \forall z \, (\varphi(z) \rightarrow z = x))$$

· Axiom der leeren Menge: $\exists! x \, \forall z \, (z \notin x)$ und diese Menge bezeichnen wir mit dem Konstantensymbol $\emptyset$.

· Teilmengenrelation $\subseteq$: $y \subseteq x :\Longleftrightarrow \forall z (z \in y \rightarrow z \in x)$

y ist Teilmenge von x

$y \subsetneq x :\Longleftrightarrow y \subseteq x \wedge x \neq y$

echte Teilmenge

- Ordinalzahlen [sehr wichtig]:
  - Sei $z \in x$. Dann ist z ein <u>$\in$-minimales Element</u> von x falls $\forall y\,(y \notin z \vee y \notin x)$
    bzw. $\forall y\,(y \in z \rightarrow y \notin x)$.
  - Eine Menge x ist <u>geordnet durch $\in$</u> falls für alle $y_1, y_2 \in x$ gilt: $y_1 \in y_2$ oder $y_1 = y_2$ oder $y_1 \ni y_2$
    [Frage? nicht ausschliessliches oder!]
  - Eine Menge x ist <u>wohlgeordnet durch $\in$</u> falls x durch $\in$ geordnet ist und jede nicht-leere Teilmenge von x ein $\in$-minimales Element besitzt.
  - Eine Menge x ist <u>transitiv</u>, falls $\forall y\,(y \in x \rightarrow y \subseteq x)$
    [zu transitiv: $z \in \underbrace{y \in x}_{y \subseteq x} \rightarrow z \in x$]
  - Eine Menge ist eine <u>Ordinalzahl</u> falls sie transitiv und wohlgeordnet durch $\in$ ist. [Ordinalzahlen werden meist durch griech. Buchstaben bezeichnet]
  - Die <u>Kollektion</u> aller Ordinalzahlen wird mit Ω bezeichnet; d.h. $\alpha \in \Omega$ bedeutet nur, "α ist eine Ordinalzahl". <u>Bsp.</u> $\emptyset \in \Omega$

<u>Faktum 1.1</u> (3.1) Ist $\alpha \in \Omega$, dann ist entweder $\alpha = \emptyset$ oder $\emptyset \in \alpha$.

<u>Beweis:</u> Weil $\alpha \in \Omega$, ist α wohlgeordnet durch $\in$.

Fall 1: $\alpha = \emptyset$ ✓

Fall 2: $\alpha \neq \emptyset$. $\alpha \subseteq \alpha \Rightarrow \alpha$ hat $\in$-min. Element x_0.

- $x_0 = \emptyset$ ✓
- $x_0 \neq \emptyset \Rightarrow \exists z\,(z \in x_0) \xRightarrow{\alpha \text{ trans.}} z \in \alpha$

  x_0 nicht $\in$-min. ↯

⊣

[Bis jetzt haben wir nur die $\emptyset$ als Menge...]

2 Paarmengenaxiom

$$\forall x \forall y \exists u \forall z \, (z \in u \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$$

Wir schreiben $\{x,y\}$ für die Menge mit den Elementen x und y, also

$$\forall x \forall y \exists u \, (u = \{x,y\}).$$

Bsp. • Für $x = y$ ist $\{x,x\} = \underbrace{\{x\}}_{\text{ist eine Menge}}$ (mit Extensionalitätsaxiom)

• Wir können nun die Mengen $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$ bilden, oder auch $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$
[welche dieser Mengen sind Ordinalzahlen?]

[Bis jetzt $x \in x$ nicht ausgeschlossen; gilt aber für Ordinalzahlen.]

Faktum 1.2 (3.2) Ist $\alpha \in \Omega$, so gilt $\alpha \notin \alpha$.

Beweis: Gilt $\alpha \in \alpha$, dann ist $\{\alpha\} \subseteq \alpha$ und $\{\alpha\} \neq \emptyset$ (weil $\alpha \in \{\alpha\}$).
Weil nun α wohlgeordnet durch $\in$ ist und $\{\alpha\} \neq \emptyset$, besitzt $\{\alpha\}$ ein $\in$-min. Element $x_0 \in \{\alpha\}$. Da α das einzige Element von $\{\alpha\}$ ist, ist $x_0 = \alpha$, und weil $\alpha \in \alpha$ (nach Voraussetzung), ist x_0 nicht $\in$-min. ↯ ⊣

[Da $\{x,y\} = \{y,x\}$ (mit Ext.-Axiom) sind Paarmengen ungeordnete Paare; um geordnete Paare zu definieren gehen wir wie folgt vor:]

• geordnete Paare: Für Mengen x,y ist das <u>geordnete Paar</u> $\langle x,y \rangle$ definiert durch

$$\langle x,y \rangle := \{\{x\}, \{x,y\}\}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass $\langle x,y \rangle = \langle x',y' \rangle$ gdw. $x = x' \wedge y = y'$

Beachte: $\langle x,x \rangle = \{\{x\}\}$. [Tripel erwähnen]

T. 4VI

3 Vereinigungsaxiom

[Motivation: $x \cup y$, $x \cup y \cup \ldots \rightsquigarrow x \cup y = \bigcup\{x,y\}$]

$$\forall x \exists u \forall z (z \in u \leftrightarrow \exists w \in x (z \in w))$$

$x \cup y := \bigcup\{x,y\}$; $x = \{y_z : z \in I\}$, $\bigcup_{z \in I} y_z$ für $\bigcup x$.

Mit dem Paarmengenaxiom können wir x^+ wie folgt definieren:

$$x^+ := x \cup \{x\} \quad , \quad \text{d.h.} \quad x^+ = \bigcup\{x, \{x\}\}$$

$0 := \emptyset$, $1 := 0^+ = \{\emptyset\}$, ...

Eine Menge x heisst induktiv falls gilt:

$$\forall y (y \in x \rightarrow (y \cup \{y\}) \in x)$$

[ind. Mengen unendlich? $\emptyset$ induktiv]

4 Unendlichkeitsaxiom

[eine neue Menge wird postuliert]

$$\exists I (\emptyset \in I \wedge \forall y (y \in I \rightarrow (y \cup \{y\}) \in I))$$

I enthält $0, 1, 2, \ldots$ (wie oben) ; $I = \mathbb{N}$?

[wir suchen "kl. I"]

5 Aussonderungsaxiom

Informell: Sei $\varphi(z)$ eine Formel mit der freien Variable z welche auch Parameter enthalten kann. Dann ist folgende Formel ein Axiom (eigentlich Axiomenschema):

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))$$

$$\text{"} y = \{z \in x : \varphi(z)\} \text{"}$$

[Bem. zu Russel's Paradoxon]

<u>Notation</u>: $\forall z \in x\, (\varphi(z)) \;:\Longleftrightarrow\; \forall z\, ((z \in x) \to \varphi(z))$

$\exists z \in x\, (\varphi(z)) \;:\Longleftrightarrow\; \exists z\, ((z \in x) \wedge \varphi(z))$

<u>Durchschnitt</u>: x_0, x_1 Mengen; $\varphi(z)$ sei $z \in x_0$
↑ Parameter von φ

$$y = \underbrace{\{ z \in x_1 : \varphi(z) \}}$$

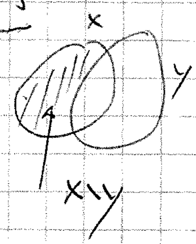
$$z \in x_1 \wedge z \in x_0 \;\Longleftrightarrow:\; z \in (x_1 \cap x_0)$$

allg. $\bigcap x := \{ z \in \bigcup x : \underbrace{\forall y \in x\, (z \in y)}_{\varphi(z) \text{ mit Parameter } x} \}$

$x \cap y := \bigcap \{x, y\}$

<u>Differenz</u>: Für $\varphi(z) \equiv z \notin y$ (Parameter y)
erhalten wir

$$\underbrace{\{ z \in x : z \notin y \}}_{x \setminus y}$$



<u>Theorem 1.3 (3.3)</u>

(a) Sind $\alpha, \beta \in \Omega$, dann ist $\alpha \in \beta$ <u>oder</u> $\alpha = \beta$ <u>oder</u> $\beta \in \alpha$.
(Trichotomie)

(b) $\alpha \in \beta \in \Omega \Rightarrow \alpha \in \Omega$ [in Worten]

(c) $\alpha \in \Omega \Rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \Omega$

(d) Ω ist transitiv und wohlgeordnet durch $\in$;
d.h. Ω ist transitiv und jede nicht-leere Kollektion $C \subseteq \Omega$ hat ein $\in$-minimales Element.

<u>Folgerung</u>: Wäre Ω eine Menge, so wäre Ω eine Ordinalzahl, also $\Omega \in \Omega$ ↯ zu Faktum 1.2. Damit ist Ω als die Kollektion aller Ordinalzahlen also <u>keine Menge</u>, sondern eine sogenannte <u>Klasse</u>.

Korollar 1.4 (3.4)

(a) $\alpha, \beta \in \Omega$ mit $\alpha \in \beta \Rightarrow \underbrace{\alpha + 1}_{= \alpha \cup \{\alpha\}} \leq \beta$.

(b) Für alle $\alpha \in \Omega$ gilt entweder $\underbrace{\alpha = \bigcup \alpha}$ α heisst dann Limesordinalzahl

oder es ex. $\beta \in \Omega$ mit $\underbrace{\alpha = \beta + 1}$.

α heisst dann Nachfolgerordinalzahl

Konstruktion der Menge der natürlichen Zahlen:

- Mit dem Unendlichkeitsaxiom existiert I mit
$$\emptyset \in I \text{ und } \forall y \,(y \in I \rightarrow (y \cup \{y\}) \in I)$$

- Mit dem Aussonderungsaxiom bilden wir die Menge
$$I_\Omega = \{\alpha \in I : \underbrace{\alpha \in \Omega}_{\alpha \text{ ist Ordinalzahl}}\} \qquad (= \text{"}I \cap \Omega\text{"})$$

- Mit Thm. 1.3(c) ist I_Ω eine induktive Menge mit $\emptyset \in I_\Omega$.
Sei $C := \Omega \setminus I_\Omega$ ist eine nicht-leere Klasse von Ordinalzahlen, hat also mit Thm. 1.3(d) ein $\in$-min. Element λ_0.
Weil $\lambda_0 \notin I_\Omega$ und jedes $\alpha \in \lambda_0$ zu I_Ω gehört, ist λ_0 eine induktive Menge. Daraus folgt, dass λ_0 eine Limesordinalzahl ist.

- Sei nun $\Lambda := \{\alpha \in \lambda_0 : \alpha \neq \emptyset \wedge \bigcup \alpha = \alpha\}$.
Ist $\Lambda = \emptyset$, so sei $\omega := \lambda_0$.
Andernfalls sei ω dass $\in$-min. Element von Λ.
In beiden Fällen ist ω die kl. Limesordinalzahl.

- $0 := \emptyset \in \omega$ und mit jedem $n \in \omega$ ist auch
$n + 1 := n \cup \{n\} \in \omega$; allg. gilt für $n \in \omega$: $n = \{k \in \omega : k < n\}$
wobei $k < n :\Leftrightarrow k \in n$