[Ordinalzahlen sind eine "Erweiterung" der nat. Zahlen und verhalten sich im Wesentlichen gleich wie nat. Zahlen. Das folgende Thm. ist eine Verallgemeinerung des Induktionsaxioms der Peano Arithmetik (Zahlentheorie).]

Theorem 1.5 (3.5) Transfinites Induktionstheorem

Sei $C \subseteq \Omega$ eine Klasse von Ordinalzahlen für die folgendes gilt:

(a) $\alpha \in C \Rightarrow \alpha+1 \in \Omega$.

(b) Ist α eine Limesordinalzahl und gilt $\forall \beta \in \alpha (\beta \in C)$, dann ist $\alpha \in C$.

Dann ist C die Klass aller Ordinalzahlen, d.h. $C = \Omega$.

Beweis: Aus (b) folgt $0 \in C$, denn $\emptyset$ ist eine Limesord. und $\forall \beta \in \emptyset (\beta \in C) \iff \forall \beta (\beta \in \emptyset \to \beta \in C)$

$\iff \forall \beta\ (\beta \notin \emptyset \vee \beta \in C)$

was aus der Def. von $\emptyset$ folgt.

- Wäre $C \neq \Omega$, so ex. mit Thm. 1.3.(d) ein $\in$-minimales Element α_0 von $\Omega \setminus C$ $(\neq \emptyset)$. Ist $\alpha_0 = \beta+1$, so ist nach Def. von α_0, $\beta \in C$ und mit (a) folgt $\alpha_0 \in C$ $\lightning$. Ist α_0 Limesord., so gilt (wieder nach Def. von α_0), $\forall \beta \in \alpha_0 (\beta \in C)$ und mit (b) folgt $\alpha_0 \in C$ $\lightning$.
- Somit ist $\Omega \setminus C = \emptyset$, d.h. $C = \Omega$.

$\dashv$

Korollar 1.6 (3.6) Ist $\varphi(x)$ eine Formel mit freier Variable x, so gilt:

$$\forall \alpha \in \Omega \big(\forall \beta \in \alpha (\varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha) \big) \to \forall \alpha \in \Omega (\varphi(\alpha))$$

Beweis: Sei $C \subseteq \Omega$ die Klasse aller Ordinalzahlen $\alpha \in \Omega$ für die $\varphi(\alpha)$ gilt. Mit Thm. 1.5 ist dann $C = \Omega$.

$\dashv$

[Für Konstruktionen in denen Kor. 1.6 verwendet sagen wir "... mit transfiniter Induk."]

6 Potenzmengenaxiom

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

Für jede Menge x ex. die Potenzmenge $\mathcal{P}(x)$ aller Teilmengen von x.

[Mit Hilfe der Axiome 0–6 können wir nun cartesische Produkte, Funktionen und Relationen definieren; sogar Modell von PA.]

cartesische Produkte: Seien A, B zwei Mengen. Dann ist das cartesische Produkt $A \times B$ dieser Mengen definiert durch:

$$A \times B := \{ \underbrace{\langle x,y \rangle}_{= \{ \underbrace{\{x\}}_{\in \mathcal{P}(A)}, \underbrace{\{x,y\}}_{\in \mathcal{P}(A \cup B)} \} \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)} \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B) : x \in A \wedge y \in B \} \in \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$$

Funktionen: Seien A, B zwei Mengen. Dann ist die Menge ${}^{A}B$ aller Funktionen von A nach B definiert durch:

$$ {}^{A}B := \{ f \subseteq A \times B : \forall x \in A \exists! y \in B (\langle x,y \rangle \in f) \}$$

Ein Element $f \in {}^{A}B$ ist eine Funktion von A nach B, bezeichnet mit $f: A \to B$, wobei $\underset{\text{"domain"}}{\mathrm{dom}}(f) := A$.

[Es ist nun leicht spezielle Fkt. wie z.B. Injektionen, Surjektionen und Bijektionen zu definieren; auch Inverse können wir definieren.]

Sei $f \in {}^{A}B$:

- Für $\langle x,y \rangle \in f$ schreiben wir $f(x) = y$.
- Für $S \subseteq A$ sei $f[S] := \{ y \in B : \exists x \in A (y = f(x)) \}$
- Für $S \subseteq A$ sei $f|_S := \{ \langle x,y \rangle \in f : x \in S \}$

- Eine Menge E heisst endlich, falls eine Surjektion von einer nat. Zahl $n \in \omega$ auf E existiert; sonst heisst E unendlich. [$f = \emptyset$ ist surj. auf $\emptyset$]
- C abzählbar $\Leftrightarrow$ Surj. $\omega \twoheadrightarrow C$; sonst überabz.

noch mals cartesische Produkte:

Für $n \in \omega$ und A eine Menge, können wir die Menge der Funktionen ${}^nA$ identifizieren mit $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{-mal}}$, welche wir mit A^n bezeichnen.

- Mit dem Ersetzungsaxiom können wir dann auch die Menge aller endlichen Sequenzen mit Elementen aus einer Menge A definieren als:

$$\mathrm{seq}(A) := \bigcup_{n \in \omega} {}^nA$$

[warum brauchen wir noch ein weiteres Axiom?]

Für $n \in \omega$ können wir auch

$$[S]^n := \{x \in \mathcal{P}(S) : \text{es ex. Bij. zwischen } x \text{ und } n\}$$

d.h. die Menge aller n-elem. Teilmengen von S definieren, und wieder mit dem Ersetzungsaxiom dann auch

$$\mathrm{fin}(S) := \bigcup_{n \in \omega} [S]^n \quad \text{(endl. Teilmengen von } S\text{).}$$

Relationen: Eine n-stellige Relation R auf einer Menge A ist nichts anderes als eine Teilmenge von A^n, d.h.

$$R \subseteq \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{-mal}}$$

[spez. Rel: Äquiv.-Rel., Wohlordnung, etc.]

7 Ersetzungsaxiom

Für jede Formel $\varphi(x,y)$ (mit Parametern) wobei x und y die einzigen freien Variablen von φ sind, ist folgende Formel ein Axiom:

$$\forall A \, (\underbrace{\forall x \in A \, \exists! y \, \varphi(x,y)}_{\varphi \text{ ist eine "Klassenfunktion" } F} \longrightarrow \underbrace{\exists B \, \forall x \in A \, \exists y \in B \, \varphi(x,y)}_{F[A] \subseteq B \ (B \text{ Menge})})$$

[Wie lässt sich $\{{}^nA : n \in \omega\}$ bilden.]

mit Aussonderungsaxiom ex. Menge $\tilde{B} \subseteq B$ mit $F[A] = \tilde{B}$

Theorem 1.7 (3.7) Transfinites Rekursionstheorem

Sei F eine Klassenfunktion welche auf auf allen Mengen definiert ist. Dann ex. genau eine Klassenfunktion G welche auf ganz Ω definiert ist, sodass für alle $\alpha \in \Omega$ gilt:

$$G(\alpha) = F(G|_\alpha) \quad \text{, wobei} \quad G|_\alpha = \{\langle \beta, G(\beta)\rangle : \beta \in \alpha\}$$

Beweis: Falls eine solche Klassenfunktion existiert, dann muss, mit dem Ersetzungsaxiom, für jedes $\alpha \in \Omega$ $\operatorname{ran}(G|_\alpha)$ eine Menge sein, d.h. $G|_\alpha$ ist eine Funktion mit $\operatorname{dom}(G|_\alpha) = \alpha$.

- Das motiviert folgende Definition: Für $\delta \in \Omega$ heisst eine Funktion g mit $\operatorname{dom}(g) = \delta$ eine δ-Approximation (bzgl. F) falls
$$\forall \beta \in \delta \; (g(\beta) = F(g|_\beta)).$$
- Eine Fkt. g mit $\operatorname{dom}(g) = \delta$ ist somit eine δ-Approximation gdw. wenn g folgende Eigenschaften hat:
  (a) Ist $\beta + 1 \in \delta$, so ist $g(\beta+1) = F(g|_\beta \cup \{\langle \beta, g(\beta)\rangle\})$
  (b) Ist $\beta \in \delta$ Limesordinalzahl, so ist $g(\beta) = F(g|_\beta)$.
- Es gilt $g(0) = F(\emptyset)$, und z.B. ist $g_1 = \{\langle 0, F(\emptyset)\rangle\}$ die einzige 1-Approximation. (im Buch p. 44 ist die 2-Approx. gegeben)
- Mit transf. Induktion lässt sich zeigen, dass für $\delta, \delta' \in \Omega$ immer gilt: Ist g, g' eine δ, δ'-Approx., dann ist
$$g|_{\delta \cap \delta'} = g'|_{\delta \cap \delta'}$$
(sonst wähle $\in$-min. $\beta_0 \in \delta \cap \delta'$ mit $g(\beta_0) \neq g'(\beta_0)$)
- Es bleibt zu zeigen, dass es für jedes $\delta \in \Omega$ eine δ-Approx. gibt: Andernfalls ex. mit Thm. 1.3.(d) ein kl. $\delta_0 \in \Omega$, sodass es keine δ_0-Approx. gibt, aber für jedes $\delta \in \delta_0$ ex. eine δ-Approx.

- Mit dem Ersetzungsaxiom erhalten wir $\exists D\ \forall \delta \in \delta_0\ \exists! d \in D$ ("d ist δ-Approx.") | $\varphi(x,y) :\Longleftrightarrow x \notin \delta_0 \vee$ "y ist x-Approx"

  und mit der Eindeutigkeit von δ-Approx. und dem Aussonderungsaxiom ex. eine
$$\bigcup_{\delta \in \delta_0} \delta\text{-Approx.} \quad (\text{bzw. } \textstyle\bigcup \delta_0\text{-Approx.})$$

- Sei $\delta' := \bigcup_{\delta \in \delta_0} \delta$. Ist δ_0 Limesord., so ist $\delta' = \delta_0$ ↯ zur Wahl von δ_0

  Ist $\delta_0 = \delta' + 1$ so erhalten wir eine δ_0-Approx. mit (a). ↯ zur Wahl von δ_0

- Nun definieren wir für jedes $\alpha \in \Omega$:
$$G(\alpha) := g(\alpha) \quad \text{wobei } g \text{ ein } \delta\text{-Approx. ist für ein } \delta \in \Omega \text{ mit } \alpha \in \delta.$$

⊣

<u>Ordinalzahlarithmetik</u>

Addition von Ordinalzahlen: $(\alpha, \beta \in \Omega)$

(a) $\alpha + 0 := \alpha$

(b) $\alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1$

(c) Für β Limesordinalzahl ist $\alpha + \beta := \bigcup_{\delta \in \beta} (\alpha + \delta)$

<u>Bsp.</u> $\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$

Multiplikation von Ordinalzahlen: $(\alpha, \beta \in \Omega)$

(a) $\alpha \cdot 0 := 0$

(b) $\alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$

(c) Für β Limesordinalzahl ist $\alpha \cdot \beta := \bigcup_{\delta \in \beta} \alpha \cdot \delta$

<u>Bsp.</u> $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega = \omega \cdot 2$

Exponentiation von Ordinalzahlen: $(\alpha, \beta \in \Omega)$

(a) $\alpha^0 := 1$

(b) $\alpha^{(\beta+1)} := \alpha^\beta \cdot \alpha$

(c) Für β Limesordinalzahl ist $\alpha^\beta := \bigcup_{\delta \in \beta} \alpha^\delta$ ($2^\omega = \omega$ Ord.-Arithm.!)

Theorem 1.8 (3.8) Die Addition, Multiplikation und Exponentiation von Ordinalzahlen sind wohldefinierte binäre Operationen auf der Klasse Ω.

Beweis: (nur für Addition; Mult. & Exp. in den Übungen).
Für jede Ord.-Zahl definieren wir eine Klassenfunktion F_α wie folgt: $F_\alpha(x) := \emptyset$ falls x keine Funktion ist. Ist x eine Funktion, so sei

$$F_\alpha(x) := \begin{cases} \alpha & \text{falls } x = \emptyset, \\ x(\beta) \cup \{x(\beta)\} & \text{falls } \mathrm{dom}(x) = \beta+1 \text{ und } \beta \in \Omega, \\ \bigcup_{\delta\in\beta} x(\delta) & \text{falls } \mathrm{dom}(x) = \beta \text{ und } \beta \in \Omega\setminus\emptyset \\ & \quad\text{eine Limesordinalzahl ist,} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit dem Transf. Rekursionstheorem ex. für jedes $\alpha \in \Omega$ eine Klassenfunktion G_α, sodass für jedes $\beta \in \Omega$ gilt:

$$G_\alpha(\beta) = F_\alpha(G_\alpha|_\beta).$$

Nach Definition ist $G_\alpha(\emptyset) = F_\alpha(\emptyset) = \emptyset$, d.h. $G_\alpha(\emptyset) = \alpha + \emptyset$.
Gilt für ein $\beta \in \Omega$, $G_\alpha(\beta) = \alpha + \beta$, dann ist

$$G_\alpha(\beta+1) = F_\alpha(G_\alpha|_{\beta+1}) = \underbrace{\alpha+\beta}_{G_\alpha(\beta)} \cup \{\alpha+\beta\} = (\alpha+\beta)+1$$

und mit (b) aus der Def. der Addition folgt $G_\alpha(\beta+1) = \alpha + (\beta+1)$.
Ist $\beta \neq \emptyset$ Limesordinalzahl und gilt für alle $\delta \in \beta$, $G_\alpha(\delta) = \alpha + \delta$, so ist $G_\alpha(\beta) = F_\alpha(G|_\beta) = \bigcup_{\delta\in\beta} G_\alpha(\delta)$, d.h. $G_\alpha(\beta) = \bigcup_{\delta\in\beta}(\alpha+\delta)$.
Somit ist $G_\alpha(\beta) = \alpha + \beta$ für alle $\beta \in \Omega$. ⊣

Proposition 1.9 (3.9) Addition & Mult. von Ordinalzahlen ist assoz.

[Beweis: nachrechnen]

Die transitive Hülle $TC(S)$ einer Menge S ist die kl. transitive Menge welche S enthält. Konstruktion von $TC(S)$ mit Hilfe des TRT: [Idee: $S \cup \bigcup S \cup \bigcup\bigcup S \cup \ldots$]

$$F_S(x) = \begin{cases} S & \text{falls } x = \emptyset, \\ \bigcup x(\beta) & \text{falls } \mathrm{dom}(x) = \beta+1 \text{ und } \beta \in \Omega \\ \bigcup_{\delta\in\beta} x(\delta) & \text{falls } \mathrm{dom}(x) = \beta \in \Omega \setminus \emptyset \text{ und } \beta \text{ Limes O.Z.} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

für x Funktion, sonst $F_S(x) = \emptyset$

Mit dem TRT ex. eine Klassenfunktion G_S mit $G_S(\beta) = F_S(G_S|_\beta)$ für alle $\beta \in \Omega$.

<u>Proposition 1.10</u> (3.10) $G_S(\omega) = TC(S)$.

<u>Beweis</u>: Für $n \in \omega$ setzen wir $S_n = G_S(n)$ und $\bar{S} := \bigcup_{n\in\omega} S_n$.

Dann ist $S_0 = S$, $S_{n+1} = \bigcup S_n$ und $\bar{S} = G_S(\omega)$.

zu zeigen: $\bar{S} = TC(S)$

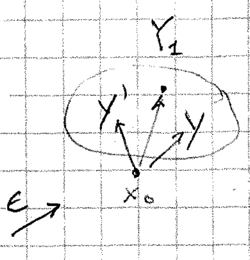
- $S \in \bar{S}$ (weil $S_0 = S$)
- Ist $x \in y \in \bar{S}$, dann ex. n mit $y \in S_n$ und $x \in S_{n+1}$, d.h. $\bar{S}$ ist transitiv.
- sei $T \subsetneq \bar{S}$ und $x_0 \in \bar{S} \setminus T$. Weil $x_0 \in \bar{S}$ ex. $n \in \omega$ mit

$\boxed{T = TC(S)}$ $x_0 \in S_n$. Sei $n_0 := \bigcap\{n \in \omega : x_0 \in S_n\}$.

Ist $n_0 = 0$, dann ist $x_0 \in S$ und $S \subsetneq T$. $\lightning$

Andernfalls sei $Y_0 := \{x_0\}$. $T \cap Y_0 = \emptyset$. Mit Induktion über ω definieren wir $n_0, n_1, \ldots$, und $Y_0, Y_1, \ldots$ wie folgt: $n_k = 0 \Rightarrow n_{k+1} = \ldots = 0$ und $Y_k = Y_{k+1} = \ldots$

Sonst sei
$$Y_{k+1} := \{y \in \bar{S} : \exists x \in Y_k (x \in y)\}$$



und $n_{k+1} := \bigcap\{n \in \omega : \exists y \in Y_{k+1} (y \in S_n)\}$.

$n_{k+1} \in n_k$ und $Y_{k+1} \neq \emptyset$.

Weil T transitiv ist, gilt $Y_k \cap T = \emptyset \Rightarrow Y_{k+1} \cap T = \emptyset$,
d.h. $T \cap Y_k = \emptyset$ für alle $k \in \omega$ (weil $T \cap Y_0 = \emptyset$).
Da $n_0 \ni n_1 \ni \dots$ ex. ein $k_0 \in \omega$ mit $n_{k_0} = 0$. Damit ist $Y_{k_0} \subseteq S$ mit $Y_{k_0} \neq \emptyset$ und $T \cap Y_{k_0} = \emptyset$, also $S \subseteq T$. ↯

$\dashv$

8 Fundierungsaxiom

[irrelevant ausserhalb der Mengenlehre]

$$\forall x \, (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \, (y \cap x = \emptyset))$$

Folgerungen:
- Es gibt keine unendl. Sequenzen der Form $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots \ni x_n \ni \dots$ [Betrachte $x = \{x_n : n \in \omega\}$]
- $y \in y$ ist nicht möglich [Betrachte $\{y\} = x$; $x \cap y = y$]
- auch endl. Zyklen $x_0 \ni x_1 \ni \dots \ni x_n \ni x_0$ sind ausgeschlossen.

Die Axiome 0–8 bilden das Axiomensystem ZF der Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre.