3 Kardinalzahlcharakteristiken

[Allg. Bemerkungen zu Kard.Char. (Kardinalzahlinvarianten) und CH]

- reelle Zahlen $\mathbb{R}$: $[\omega]^\omega$, ${}^\omega\omega$
- Definition von $\subseteq^*$, $\leq^*$, $<^*$
- allg. Def. einer Kard.-Char.: P eine Eigenschaft von Mengen $X \subseteq \mathbb{R}$

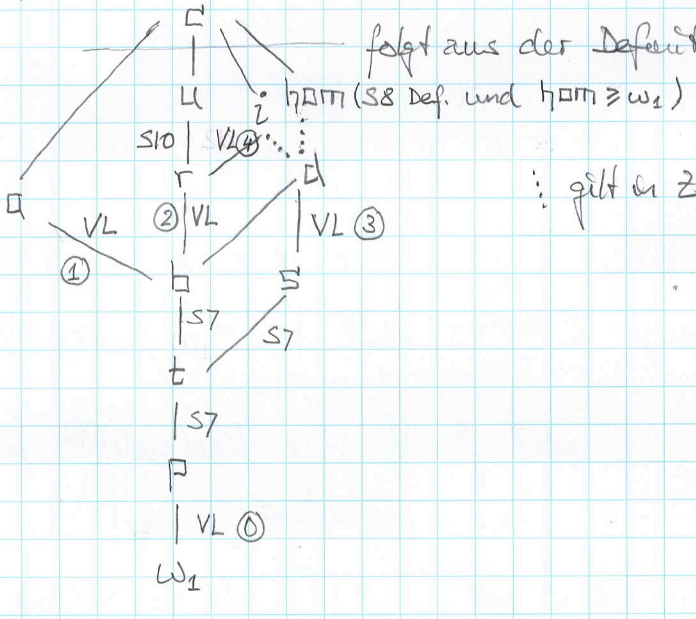
$$C(P) := \min\{|X| : X \subseteq \mathbb{R} \wedge P(X)\}$$ [Bem: $\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{N})$]

Def. von Idealen und $\mathcal{M}$ & $\mathcal{N}$

- Wir betrachten (Vorlesung & Übungen)

$\mathfrak{c}, \omega_1, \underbrace{\mathfrak{r}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}, \mathfrak{a}}_{\text{Serie 0}}, \mathfrak{p}, \mathfrak{s}, \underset{\text{Serie 7}}{\mathfrak{t}}, \underset{\text{Serie 8}}{\mathfrak{hom}}, \underset{\text{Serie 10}}{\mathfrak{u}}, \mathfrak{i}, \mathrm{add}(\mathcal{M}), \mathrm{cov}(\mathcal{N})$ [allg. für Ideale]

und zeigen (in ZFC): [Linie / nach oben meint "$\leq$"]



folgt aus der Definition

$\vdots$ gilt in ZFC, nicht Vorlesungsstoff

<u>Definition von $\mathfrak{p}$:</u>

- Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ hat die "strong finite intersection property" sfip, falls für jede endl. Teilfamilie $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ gilt: $|\bigcap \mathcal{E}| = \omega$.
- $y \in [\omega]^\omega$ ist ein <u>unendl. pseudo-Durchschnitt</u> von $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$, falls gilt: $\forall x \in \mathcal{F}\,(y \subseteq^* x)$, d.h. $\forall x \in \mathcal{F}\,(|y \setminus x| < \omega)$.

[Bem. zu $\mathfrak{p}=\mathfrak{t}$] $\mathfrak{p} := \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega \wedge |\mathcal{F}| \geq \omega \wedge \mathcal{F}$ hat sfip $\wedge$ $\mathcal{F}$ hat keinen unendl. pseudo-Durchschnitt$\}$

Definition von $\mathfrak{s}$:

- Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ heisst <u>splitting</u>, falls
$$\forall y \in [\omega]^\omega \; \exists x \in \mathcal{F} \; (|y \cap x| = |y \setminus x| = \omega)$$

$$\mathfrak{s} := \min \{ |\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega \wedge \mathcal{F} \text{ ist splitting} \}$$

Theorem 3.1 (9.1) $\omega_1 \leq \mathfrak{p}$

Beweis: Sei $\mathcal{F} = \{ x_n : n \in \omega \} \subseteq [\omega]^\omega$ eine abz. Familie mit sfip.

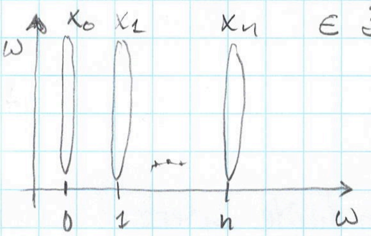
Sei $a_0 := \min x_0$ und für $n \in \omega$ sei
$$a_{n+1} := \min \{ m \in \omega : m > a_n \wedge m \geq \min \bigcap_{i \leq n+1} x_i \}.$$
Weiter sei $y := \{ a_n : n \in \omega \}$. Dann ist $y \subseteq^* x_n$ für alle $n \in \omega$, denn $|y \setminus x_n| \leq n$, und somit ist y ein unendl. pseudo-Durchschnitt von $\mathcal{F}$; d.h. $\mathcal{F}$ ist nicht splitting.

$\dashv$

Theorem 3.2 (9.7) $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$

Beweis: Wir zeigen, wie man aus einer mad family $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ eine unbounded family $\mathcal{E} \subseteq {}^\omega\omega$ mit $|\mathcal{F}| = |\mathcal{E}|$ konstruiert.

- Sei $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ eine mad family der Kardinalität $\kappa > \omega$.
- Mit geeigneter Bij. $\omega \to \omega \times \omega$ ex. $\tilde{\mathcal{F}} \subseteq [\omega \times \omega]^\omega$ mad family mit



$\in \tilde{\mathcal{F}}$ und $|\tilde{\mathcal{F}}| = |\mathcal{F}|$. Insbesondere gilt: Ist $y \in \tilde{\mathcal{F}}$ versch. von x_n (für $n \in \omega$), so ist $|y \cap x_n| < \omega$.

- $f_y : \omega \to \omega$ mit $f_y(n) := \begin{cases} \max\{k \in \omega : \langle n, k \rangle \in (x_n \cap y)\} + 1 & \text{für } \{\ldots\} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
  $y \in \tilde{\mathcal{F}} \setminus \{x_n : n \in \omega\}$
- $\mathcal{E} = \{ f_y \in {}^\omega\omega : y \in \tilde{\mathcal{F}} \setminus \{x_n : n \in \omega\} \}$ ist eine unbounded family mit $|\mathcal{E}| = |\mathcal{F}|$.
- Zu zeigen: Wie bastelt man aus $\mathcal{F}$ die Familie $\tilde{\mathcal{F}}$?

$\dashv$

Theorem 3.3 (9.5) $\mathfrak{b} \le \mathfrak{r}$

Beweis: Sei $\mathcal{E} = \{x_\xi \in [\omega]^\omega : \xi \in \kappa < \mathfrak{b}\}$ eine beliebige Familie mit $|\mathcal{E}| = \kappa < \mathfrak{b}$. Wir zeigen, dass $\mathcal{E}$ keine reaping family ist.

- Für jedes $x_\xi \in \mathcal{E}$ sei $g_\xi \in {}^\omega\omega$ die aufsteigende Abzählung der Menge $x_\xi \setminus \{0\}$. Formaler: $g_\xi(k) = \bigcap(x_\xi \setminus \{g_\xi(i) : i \in k\})$.
- Weiter sei $\tilde{g}_\xi(k) := g_\xi^k(0)$, wobei $g_\xi^{k+1}(0) := g_\xi(g_\xi^k(0))$ und $g_\xi^0(0) := 0$.
- Betrachte $\tilde{\mathcal{E}} := \{\tilde{g}_\xi : \xi \in \kappa\}$. Weil $\kappa < \mathfrak{b}$ ist $\tilde{\mathcal{E}}$ beschränkt, d.h. es ex. $f \in {}^\omega\omega^{(*)}$ mit $\tilde{g}_\xi <^* f$ (für alle $\xi \in \kappa$).

(*) streng mon. wachsend, $f(0)>0$

- Sei $x = \bigcup_{k\in\omega} [f^{2k}(0), f^{2k+1}(0))$, mit $[a,b) = \ldots$ Dann ex. für jedes $\xi \in \kappa$ ein $n_\xi \in \omega$, sodass für alle $k \ge n_\xi$ gilt:

$$f^k(0) \le \underbrace{\tilde{g}_\xi(f^k(0))}_{\in x_\xi} < f(f^k(0)) = f^{k+1}(0).$$

- Damit gilt $|x_\xi \cap x| = |x_\xi \cap (\omega \setminus x)| = \omega$, d.h. $\mathcal{E}$ ist nicht reaping. ⊣

Def. von $\mathfrak{s}$ $\longrightarrow$ von p. 26

Theorem 3.4 (9.4) $\mathfrak{s} \le \mathfrak{d}$

Beweis: Für jede streng monoton wachsende Funktion $f \in {}^\omega\omega$ mit $f(0) > 0$ sei

$$\sigma_f := \bigcup_{n\in\omega} \{[f^{2n}(0), f^{2n+1}(0))$$

- Sei $\mathcal{D} \subseteq {}^\omega\omega$ eine dominating family mit f streng mon. wachsend und $f(0)>0$ für alle $f \in \mathcal{D}$.
- Sei

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}} := \{\sigma_f : f \in \mathcal{D}\}.$$

Wir zeigen: $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ ist eine splitting family (woraus $\mathfrak{d} \ge \mathfrak{s}$ folgt).

- Sei $x_0 \in [\omega]^\omega$ beliebig und sei f_{x_0} die aufsteigende Abz. von x_0. Es gilt $k \le f_{x_0}(k)$ für alle $k \in \omega$.

- Weil $\mathcal{D}$ eine dominating family ist ex. ein $f \in \mathcal{D}$ sodass $f_{x_0} <^* f$ und somit ex. $n_0 \in \omega$, sodass $f_{x_0}(k) < f(k)$ für alle $k \geq n_0$.
- Weiter gilt für $k \geq n_0$:

$$\underbrace{f^k(0)}_{\geq k \geq n_0} \leq f_{x_0}\underbrace{(f^k(0))}_{\in x_0} < f(f^k(0)) = f^{k+1}(0)$$

- Somit ist $|x_0 \cap \sigma_f| = |x_0 \setminus \sigma_f| = \omega$, und weil $x_0 \in [\omega]^\omega$ beliebig war ist $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ eine splitting family.

$\dashv$

<u>Definition von $\mathfrak{i}$:</u>

- Eine Familie $\mathcal{J} \subseteq [\omega]^\omega$ heisst <u>unabhängig</u>, falls für alle $n, m \in \omega$ und disjunkte Familien $\{x_i : i \in n\}, \{y_j : j \in m\} \subseteq \mathcal{J}$ gilt:

$$\bigcap_{i \in n} x_i \cap \bigcap_{j \in m} (\omega \setminus y_j) \quad \text{ist unendlich}$$

wobei $\bigcap \emptyset := \omega$.

- Eine maximale unabh. Familie $\mathcal{J} \subseteq [\omega]^\omega$ ist eine unabh. Familie welche in keiner unabh. Familie echt enthalten ist.

$$\mathfrak{i} := \min\{|\mathcal{J}| : \mathcal{J} \subseteq [\omega]^\omega \text{ und } \mathcal{J} \text{ ist eine max. unabh. Fam.}\}$$

<u>Proposition 3.5</u> (9.9) Es ex. max. unabh. Familien $\mathcal{J} \subseteq [\omega]^\omega$ mit $|\mathcal{J}| = \mathfrak{c}$.

<u>Beweis:</u> Es genügt eine unabh. Familie der Kard. $\mathfrak{c}$ zu konstruieren.

- Sei

$$C := \{\langle s, A\rangle : s \in \mathrm{fin}(\omega) \wedge A \subseteq \mathcal{P}(s)\}$$

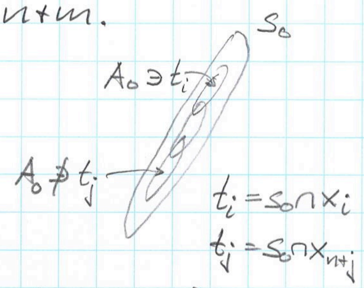
und für jedes $x \in [\omega]^\omega$ sei

$$P_x := \{\langle s, A\rangle \in C : x \cap s \in A\}.$$

Weil $C \subseteq \mathrm{fin}(\omega) \times \mathrm{fin}(\mathrm{fin}(\omega))$ und $|\mathrm{fin}(\omega)| = \omega$, gilt $|C| = \omega$, insbesondere ex. Bijektion $C \to \omega$.

- Für $x, y \in [\omega]^\omega$ mit $x \neq y$ ex. ein $s \in fin(\omega)$ sodass $x \cap s \neq y \cap s$, d.h. $P_x \neq P_y$. D.h. $\mathcal{J}_0 := \{P_x : x \in [\omega]^\omega\} \subseteq [C]^\omega$ hat die Kardinalität $\mathfrak{c}$.

- Wir zeigen nun, dass $\mathcal{J}_0$ eine unabh. Familie ist:
  - Seien $x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ (für $n, m \in \omega$) paarweise versch. unendl. Teilmengen von ω, so ex. ein $s_0 \in fin(\omega)$ mit $x_i \cap s_0 \neq x_j \cap s_0$ für alle $0 \leq i < j \leq n+m$.



  - Sei $A_0 := \{s_0 \cap x_i : 0 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{P}(s_0)$ und für jedes $k \in \omega \setminus s_0$ mit $k \geq 1$ sei
$$s_k := s_0 \cup \{k\} \text{ und } A_k := A_0 \cup \{t \cup \{k\} : t \in A_0\}.$$
  - Dann ist $\{\langle s_k, A_k \rangle : k > 0 \wedge k \in \omega \setminus s_0\} \subseteq \bigcap_{0 \leq i \leq n} P_{x_i} \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq m} P_{x_{n+j}}$,

d.h. $\bigcap P_{x_i} \setminus \bigcup P_{x_{n+i}}$ ist unendlich und $\mathcal{J}_0$ ist eine unabh. Familie. $\dashv$

<u>Theorem 3.6</u> (9.11) $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{i}$ (insbesondere $\omega_1 \leq \mathfrak{i}$)

<u>Beweis:</u> Wir konstruieren aus einer max. unabh. Familie eine reaping family derselben Kardinalität.

- Sei $\mathcal{J} \subseteq [\omega]^\omega$ eine max. unabh. Familie der Kard. $\mathfrak{i}$ und sei
$$\mathcal{R} := \{\bigcap I \setminus \bigcup J : I, J \in fin(\mathcal{J}) \text{ und } I \cap J = \emptyset\} \subseteq [\omega]^\omega.$$
Dann ist, weil $|fin(\mathfrak{i})| = \mathfrak{i}$, $|\mathcal{R}| = \mathfrak{i}$.

- Weil $\mathcal{J}$ eine max. unabh. Familie ist, finden wir für jedes $x \in [\omega]^\omega$ ein $y \in \mathcal{R}$ (bzw. $y = \bigcap I \setminus \bigcup J$), sodass $|x \cap y| < \omega$ oder $|(\omega \setminus x) \cap y| < \omega$. Weil nun $(\omega \setminus x) \cap y = y \setminus x$, bedeutet dies, dass für jedes $x \in [\omega]^\omega$ ein $y \in \mathcal{R}$ ex. mit $|y \cap x| < \omega$ oder $y \subseteq^* x$, d.h. $\mathcal{R}$ ist eine reaping family. $\dashv$