Bemerkungen

zur Potenzmenge: $\mathcal{P}(\omega)$ ist überabzählbar; $\{X \subseteq \omega : \varphi(X)\}$ ist abzählbar;

definierbare Teilmengen

in $V \models ZF$ ex. überabz. viele nicht definierbare Teilmengen von ω; die Kardinalität dieser nicht-definierbaren Teilmengen wird von ZF nicht bestimmt.

Anwendung des Teichmüller Prinzips: "Jeder Vektorraum hat eine Basis"

- Sei V ein VR und sei $\mathcal{F} := \{X \subseteq V : X$ Menge von lin. unabh. Vektoren$\}$.
- $\mathcal{F}$ hat endl. Charakter und das max. Element von $\mathcal{F}$ ist eine Basis von V.

[Bezug von "Jeder VR..." zu AC und von "Jedes V aufspannende..." zu AC]

2 KARDINALITÄTEN & KARDINALZAHLEN

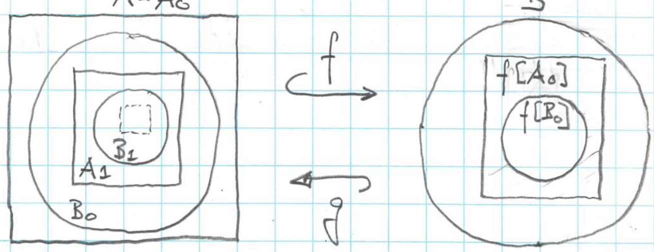
2.1 Kardinalitäten in ZF [aus Ch. 3, p. 53-56]

Zwei Mengen A und B haben dieselbe Kardinalität, in Zeichen $|A| = |B|$, falls eine Bijektion $f: A \to B$ existiert. Die Kardinalität von A ist kleiner-gleich der Kard. von B, $|A| \leq |B|$, falls $|A| = |B'|$ für ein $B' \subseteq B$; $|A| \leq |B| \Longleftrightarrow$ es ex. Injektion $g: A \hookrightarrow B$.

Cantor-Bernstein Theorem 2.1 (3.14) Für Mengen A, B gilt:

Aus $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$ folgt $|A| = |B|$.

Beweis: (Bernstein)



$f: A \hookrightarrow B$; $f[A] \subsetneq B$

$g: B \hookrightarrow A$; $g[B] \subsetneq A$

$|f[A]| = |A|$

$|g[B]| = |B|$

$B_0 := g[B] \subseteq A$ allg. $A_{n+1} := g \circ f[A_n]$

$A_1 := g \circ f[A_0] \subseteq A$ $\quad B_{n+1} := g \circ f[B_n]$

und weiter sei $D := \bigcap_{n \in \omega} A_n$.

Es gilt: ($\dot\cup$ bezeichnet eine disjunkte Vereinigung)

- $A_0 \setminus D = (A_0 \setminus B_0) \,\dot\cup\, (B_0 \setminus A_1) \,\dot\cup\, (A_1 \setminus B_1) \,\dot\cup \ldots$
- $B_0 \setminus D = \qquad\qquad (B_0 \setminus A_1) \,\dot\cup\, (A_1 \setminus B_1) \,\dot\cup \ldots$
- für alle $n \in \omega$: $|A_n \setminus B_n| = |g \circ f[A_n \setminus B_n]| = |g\circ f[A_n] \setminus g \circ f[B_n]|$
  $= |A_{n+1} \setminus B_{n+1}|$

Somit ist $|A_0 \setminus D| = \big| \underbrace{(A_1 \setminus B_1)}_{\text{weil } |A_0 \setminus B_0| = |A_1 \setminus B_1|} \,\dot\cup\, (B_0 \setminus A_1) \,\dot\cup\, (A_2 \setminus B_2) \,\dot\cup \ldots \big|$

$= \big| (B_0 \setminus A_1) \,\dot\cup\, (A_1 \setminus B_1) \,\dot\cup \ldots \big| = |B_0 \setminus D|$,

also $|A_0| = |B_0|$, und weil $|B_0| = |g[B]| = |B|$ und $A_0 = A$,

gilt $|A| = |B|$. ⊣

<u>Proposition 2.2</u> (3.15) $\quad |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\omega)|$

<u>Beweis:</u> (Skizze) $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\omega)|$: Für $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, sei $r = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$ die Kettenbruchentwicklung von r, d.h. $r = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$ mit $b_0 \in \mathbb{N}$ und $b_n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ für $n \geq 1$.

gegenüber der Vorlesung korr. Version

Verlangt man für endl. Kettenbrüche $[b_0, \ldots, b_n]$ mit $n \neq 0$, dass $b_n \neq 1$, so ist diese Darstellung eindeutig. Sei nun $f(r) := \{2b_0, 2b_0 + b_1, 2b_0 + b_1 + b_2, \ldots\}$ für $r \geq 0$ und für $r = -\underbrace{[b_0, b_1, \ldots]}_{\geq 0}$ sei $f(r) := \{2b_0 + 1, 2b_0 + 1 + b_1, \ldots\}$ für $r \leq 0$, so ist $f: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{P}(\omega)$.

$|\mathcal{P}(\omega)| \leq |\mathbb{R}|$: $\quad g: \mathcal{P}(\omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \sum_{n \in x} 3^{-n} & \text{für } x \neq \emptyset, \\ 0 & \text{für } x = \emptyset. \end{cases}$$

⊣

<u>Satz von Cantor 2.3</u> (3.18) Für jede Menge M gilt $|M| < |\mathcal{P}(M)|$.

[bereits bewiesen]

Definition von $|A|$ als Menge:
$$|A| := \{B \in V_{\beta_0} : \text{es ex. Bijektion } f: A \to B\}$$
wobei β_0 die kleinste Ordinalzahl ist, so dass ein $B \in V_{\beta_0}$ ex. mit $|A| = |B|$; ist $A \in V_\alpha$, so ist $\beta_0 \leq \alpha$, d.h. β_0 existiert. $|A|$ ist die <u>Kardinalität</u> von A; Kardinalitäten wohlgeordnet Mengen: $\aleph$'s, z.B. $|\omega| = \aleph_0$.

2.2 Kardinalzahlen in ZFC [Ch. 3, p. 65-66]

Ist A eine Menge, so ist die Kardinalität der Menge A, bezeichnet mit $|A|$, definiert als die kl. Ordinalzahl α, sodass es eine Bijektion $f: \alpha \to A$ zwischen α und A gibt.
Etwas formaler: Sei $w_A \subseteq A \times A$ eine Wohlordnung von A und sei $\beta \in \Omega$ der Ordnungstyp von w_A. Dann ist

$$|A| := \min\{\alpha \in \beta+1 : \exists f \in {}^{\alpha}A \,(f \text{ ist bijektiv})\}.$$

Insbesondere sind Kardinalitäten immer Ordinalzahlen; diese heissen Kardinalzahlen.* Für $n \in \omega$ gilt $|n| = n$, d.h. alle Elemente von ω sind Kardinalzahlen. Weiter gilt $|\omega| = \omega$, d.h. ω ist eine Kardinalzahl (die kl. unendl. Kardinalzahl).

Mit dem Satz von Cantor gilt $|\mathcal{P}(\omega)| > |\omega|$, und somit ist $c := |\mathcal{P}(\omega)| > \omega$ eine überabzählbare Kardinalzahl.

* Allgemein gilt: $\kappa \in \Omega$ ist eine Kardinalzahl $\iff |\kappa| = \kappa$.

Sei $\omega_1 := \bigcap\{\kappa \in c+1 : \kappa \text{ Kardinalzahl und } \kappa > \omega\}$. Dann ist ω_1 die kl. überabzählbare Kardinalzahl.

Die Kontinuumshypothese (CH) besagt: $c = \omega_1$

Die Klasse $K \subseteq \Omega$ der Kardinalzahlen ist als Teilklasse von Ω wohlgeordnet durch $\in$. "Nummerieren" wir K mit Ordinalzahlen, so erhalten wir:

Nachfolgerkard. Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots \underset{\aleph_0}{\omega}, \underset{\aleph_1}{\omega_1}, \omega_2, \ldots \underset{\aleph_\omega}{\omega_\omega}, \omega_{\omega+1}, \ldots \omega_{\omega+\omega}, \ldots \omega_{\omega_1}, \ldots$$

Limeskard. Zahlen

$$\ldots \omega_{\omega_2}, \omega_{\omega_2+1}, \ldots \omega_{\omega_\omega}, \ldots \omega_{\omega_{\omega_\omega}}, \omega_{\omega_{\omega_\omega}+1}, \ldots$$

2.3. Kardinalzahlarithmetik

Wie für Ordinalzahlen definieren wir auch für Kardinalzahlen Addition, Multiplikation und Exponentiation: Seien κ, μ Kardinalzahlen.

Addition: $\kappa + \mu := |(\kappa \times \{0\}) \dot\cup (\mu \times \{1\})|$

Multiplikation: $\kappa \cdot \mu := |\kappa \times \mu|$

Exponentiation: $\kappa^\mu := |{}^\mu\kappa|$

Weil $|{}^A 2| = |\mathcal{P}(A)|$ schreiben wir meist 2^κ für $|\mathcal{P}(\kappa)|$.

Faktum 2.4 (3.24) Für Add., Mult. und Exp. gelten dieselben Rechenregeln wie für natürliche Zahlen.

Beispiel: $\kappa^{\mu \cdot \lambda} = (\kappa^\lambda)^\mu$

Für $f: \mu \to {}^\lambda\kappa$, $\alpha \mapsto f_\alpha : \lambda \to \kappa$ sei $\tilde{f}: \mu \times \lambda \to \kappa$, $\langle \alpha, \beta \rangle \mapsto f_\alpha(\beta)$

- Ist $f \neq f'$, so ex. $\alpha \in \mu$ mit $f_\alpha \neq f'_\alpha$, d.h. es ex. $\beta \in \lambda$ mit $f_\alpha(\beta) \neq f'_\alpha(\beta)$.
  Somit ist $\tilde{f} \neq \tilde{f}'$ und $f \mapsto \tilde{f}$ ist injektiv.
- Ist $\tilde{f}: \mu \times \lambda \to \kappa$, so ist für $\alpha \in \mu$, $\tilde{f}|_{\{\alpha\} \times \lambda} : \lambda \to \kappa$.
  D.h. für $f_0 : \mu \to {}^\lambda\kappa$, $\alpha \mapsto \tilde{f}|_{\{\alpha\}\times\lambda}$ erhalten wir $\tilde{f}_0 = \tilde{f}$ und somit ist $f \mapsto \tilde{f}$ surjektiv.

Theorem 2.5 (3.25) Für alle Ordinalzahlen $\alpha, \beta \in \Omega$ gilt:

$$\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\alpha \cdot \omega_\beta = \omega_{\alpha \cup \beta} = \max\{\omega_\alpha, \omega_\beta\}$$

Beweis: Es genügt $\omega_\alpha \cdot \omega_\alpha = \omega_\alpha$ zu zeigen (für alle $\alpha \in \Omega$).

Für $\alpha = 0$ ist
$$\omega \times \omega \to \omega, \quad \langle n, m \rangle \mapsto \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$$
eine Bijektion,

d.h. $|\omega \times \omega| = |\omega|$ und somit $\omega_0 \cdot \omega_0 = \omega_0$.

- Wir nehmen an, es ex. $\alpha \in \Omega$ mit $\omega_\alpha \cdot \omega_\alpha > \omega_\alpha$. Dann ex. ein kl. solches $\alpha_0 \in \Omega$, d.h. $\omega_{\alpha_0} \cdot \omega_{\alpha_0} > \omega_{\alpha_0}$ und $\omega_\beta \cdot \omega_\beta = \omega_\beta$ für alle $\beta \in \alpha_0$.

- Auf $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$ definieren wir die Ordnungsrelation "<" wie folgt:

$$\langle \gamma_1, \delta_1 \rangle < \langle \gamma_2, \delta_2 \rangle \iff \begin{cases} \max\{\gamma_1, \delta_1\} < \max\{\gamma_2, \delta_2\}, \text{ oder} \\ \max\{\gamma_1, \delta_1\} = \max\{\gamma_2, \delta_2\} \wedge \gamma_1 < \gamma_2, \text{ oder} \\ \text{———} '' \text{———} \wedge \gamma_1 = \gamma_2 \wedge \delta_1 < \delta_2. \end{cases}$$

- < ist eine Wohlordnung auf $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$:
  Ist $X \subseteq \omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$, $X \neq \emptyset$, so suchen wir zuerst die Elemente $\langle \gamma, \delta \rangle \in X$ mit kl. $\max\{\gamma, \delta\}$; dann mit kl. γ; dann mit kl. δ.

- Sei nun $\eta \in \Omega$ der Ordnungstyp dieser Wohlord. auf $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$. Weil $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0} > \omega_{\alpha_0}$ ist $|\eta| > \omega_{\alpha_0}$. Sei weiter

$$\Gamma : \eta \to \omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$$

  die ordnungserhaltende Bijektion zwischen η und $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$ und sei $\langle \gamma_0, \delta_0 \rangle := \Gamma(\omega_{\alpha_0})$.

- Dann sind $\gamma_0, \delta_0 \in \omega_{\alpha_0}$ und somit ist $\nu := \max\{\gamma_0, \delta_0\} \in \omega_{\alpha_0}$. Insbesondere ist $|\nu| < \omega_{\alpha_0}$, also $|\nu| = \omega_\beta$ für ein $\beta \in \alpha_0$.

- Aus unserer Annahme folgt $|\nu \times \nu| = \omega_\beta \cdot \omega_\beta = \omega_\beta < \omega_{\alpha_0}$.

- Andererseits ist $\omega_{\alpha_0} \leqslant |\nu \times \nu| = \omega_\beta$ $\lightning$ zu $\omega_\beta < \omega_{\alpha_0}$

$\dashv$

<u>Korollar 2.6</u> (3.26) Für unendl. Kardinalzahlen κ gilt:

(a) $\kappa^{n+1} = \kappa$ für alle $n \in \omega$

(b) $seq(\kappa) = fin(\kappa) = \kappa$ ("seq" endl. Sequenzen, "fin" endl. Teilmengen)

(c) $\kappa^\kappa = 2^\kappa$