2.4 Kofinalitäten

Sei λ eine unendl. Limesordinalzahl. Dann heisst eine Menge $C \subseteq \lambda$ kofinal in λ falls $\bigcup C = \lambda$. Die Kofinalität von λ, bezeichnet mit $cf(\lambda)$, ist definiert durch:

$$cf(\lambda) := \min\{|C| : C \subseteq \lambda \text{ ist kofinal in } \lambda\}$$

Bem. · $cf(\lambda)$ ist per Definition eine Kardinalzahl

· Anstelle von kofinalen Teilmengen $C \subseteq \lambda$ können wir auch kofinale Sequenzen $\langle \alpha_\nu : \nu \in cf(\lambda) \rangle$ mit $\alpha_\nu < \alpha_{\nu'}$ für $\nu < \nu'$ betrachten, wobei $\bigcup\{\alpha_\nu : \nu \in cf(\lambda)\} = \lambda$.

Eine unendl. Kardinalzahl κ heisst regulär, falls $\kappa = cf(\kappa)$, sonst (d.h. wenn $cf(\kappa) < \kappa$) heisst κ singulär.

Bsp. · $\omega = cf(\omega)$, d.h. ω ist regulär.

· $cf(\omega_\omega) = cf(\omega_{\omega+\omega}) = cf(\omega_{\omega^\omega}) = cf(\omega_{\omega_\omega}) = cf(\underbrace{\omega_{\omega_{\omega_{\cdot_{\cdot}}}}}_{\omega\text{-mal}}) = \omega$,

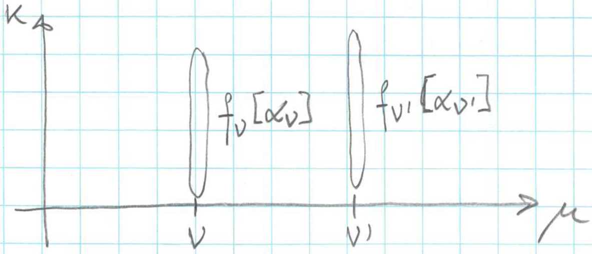
d.h. $\omega_\omega, \omega_{\omega+\omega}, \ldots$ sind singulär. $[\omega_1 ?]$

Faktum 2.7 (3.27) Die Kardinalzahl $cf(\lambda)$ ist regulär für alle unendl. Limesordinalzahlen λ.

Beweis: Sei $\kappa = cf(\lambda)$ und sei $\langle \alpha_\nu : \nu \in \kappa \rangle$ eine kofinale, streng monoton wachsende Sequenz in λ. Weiter sei $S = \langle \beta_\eta : \eta \in cf(\kappa) \rangle$ eine kofinale, streng monoton wachsende Sequenz in κ. Dann ist $\langle \alpha_{\beta_\eta} : \eta \in cf(\kappa) \rangle$ kofinal in λ. D.h. $|S| \geq cf(\lambda) = \kappa$, aber auch $|S| = cf(\kappa) \leq \kappa$, und somit ist $|S| = cf(\kappa) = \kappa$ und κ (d.h. $cf(\lambda)$) ist regulär. $\dashv$

Proposition 2.8 (3.28) Ist κ eine unendl. Kardinalzahl, so ist κ^+ (die Nachfolgerkardinalzahl von κ) regulär.

Beweis: Für einen Widerspruch nehmen wir an $cf(\kappa^+) < \kappa^+$, d.h. $cf(\kappa^+) = \mu \leq \kappa$. Sei $S = \langle \alpha_\nu : \nu \in \mu \rangle$ eine kofinale, streng monoton wachsende Sequenz in κ^+. Weil $\alpha_\nu \in \kappa^+$ (für alle $\nu \in \mu$), ist $|\alpha_\nu| \leq \kappa$ und mit AC wählen wir für jedes $\nu \in \mu$ eine Funktion $f_\nu : \alpha_\nu \hookrightarrow \kappa$.



$U = \{\{\nu\} \times f_\nu[\alpha_\nu] : \nu \in \mu\} \subseteq \kappa \times \mu$.

$|U| \leq |\kappa \times \mu| = |\kappa \times \kappa| = \kappa < \kappa^+$, und somit kann S nicht kofinal in κ^+ sein. $\dashv$

Bsp. $\omega_{\omega+5}$, ω_{17}, $\omega_{\omega+1}$, ... regulär

Summen und Produkte: Sei $I \neq \emptyset$ und $\{\kappa_\iota : \iota \in I\}$ eine Familie von Kardinalzahlen. Dann sei

$$\sum_{\iota \in I} \kappa_\iota := \left| \bigcup_{\iota \in I} A_\iota \right| \quad \text{wobei } |A_\iota| = \kappa_\iota \text{ mit } A_\iota \text{ paarweise disjunkt.}$$

Weiter sei $\prod_{\iota \in I} \kappa_\iota := \left| \bigtimes_{\iota \in I} A_\iota \right|$ mit $|A_\iota| = \kappa_\iota$.

Theorem 2.9 (3.29) (Ungleichung von König-Jourdain-Zermelo)
Sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und seien $\{\kappa_\iota : \iota \in I\}$ und $\{\lambda_\iota : \iota \in I\}$ Familien von Kardinalzahlen wobei für alle $\iota \in I$ gilt: $\kappa_\iota < \lambda_\iota$.
Dann gilt:

$$\sum_{\iota \in I} \kappa_\iota < \prod_{\iota \in I} \lambda_\iota \qquad \text{[Bezug zu AC]}$$

Beweis: Sei $\{A_\iota : \iota \in I\}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen mit $|A_\iota| = \kappa_\iota$ (für alle $\iota \in I$). Für jedes $\iota \in I$ wählen wir mit AC eine Injektion $f_\iota : A_\iota \hookrightarrow \lambda_\iota$. Weil $|A_\iota| < \lambda_\iota$ ist $\lambda_\iota \setminus f_\iota[A_\iota] \neq \emptyset$; sei $y_\iota \in \lambda_\iota \setminus f_\iota[A_\iota]$ (für jedes $\iota \in I$).

$\sum_{i\in I}\kappa_i \le \prod_{i\in I}\lambda_i$: Für jedes $i\in I$ sei $\bar{f}_i: \bigcup_{i\in I} A_i \to \lambda_i$ definiert durch

$$\bar{f}_i(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{für } x\in A_i, \\ y_i & \text{sonst,}\end{cases}$$

und sei
$$\bar{f}: \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigtimes_{i\in I}\lambda_i$$
$$x \longmapsto \langle \bar{f}_i(x) : i\in I\rangle$$

Dann ist $\bar{f}$ injektiv, d.h. $\sum_{i\in I}\kappa_i \le \prod \lambda_i$.
(weil $f_i|_{A_i}$ inj. sind)

$\sum_{i\in I}\kappa_i < \prod_{i\in I}\lambda_i$: Für einen Widerspruch sei $g: \bigcup_{i\in I} A_i \to \bigtimes_{i\in I}\lambda_i$ und für jedes $i\in I$ sei $P_i(g[A_i])$ die Projektion von $g[A_i]$ auf λ_i. Weil $|A_i| < \lambda_i$, finden wir für jedes $i\in I$ ein $z_i \in \lambda_i \setminus P_i(g[A_i])$. Dann ist die Sequenz $\langle z_i : i\in I\rangle \notin g[\bigcup_{i\in I} A_i]$, d.h. g ist nicht surjektiv und damit auch nicht bijektiv.

[es ex. keine Bij. zwischen diesen Mengen]

$\dashv$

Korollar 2.10 (3.30) Für alle unendl. Kardinalzahlen gilt:
$$\kappa < \kappa^{cf(\kappa)} \quad \text{und} \quad cf(2^\kappa) > \kappa.$$

Insbesondere gilt: $cf(c) > \omega$

Beweis: • Sei $\langle \alpha_\nu : \nu\in cf(\kappa)\rangle$ kofinal in κ. Dann gilt
$$\kappa = \Big|\bigcup_{\nu\in cf(\kappa)}\alpha_\nu\Big| \le \underbrace{\sum_{\nu\in cf(\kappa)}|\alpha_\nu|}_{=\kappa} \le cf(\kappa)\cdot\kappa = \kappa$$
$\Rightarrow$

Andererseits ist $|\alpha_\nu| < \kappa$ und mit Thm. 2.9. ist $\overbrace{\sum_{\nu\in cf(\kappa)}|\alpha_\nu|}^{=\kappa} < \prod_{\nu\in cf(\kappa)}\kappa = \kappa^{cf(\kappa)}$.

• Annahme $cf(2^\kappa) \le \kappa$ für ein κ. Aus $cf(2^\kappa)\le\kappa$ folgt
$$(2^\kappa)^{cf(2^\kappa)} \le (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa$$
$\le$

D.h. $(2^\kappa)^{cf(2^\kappa)} \le 2^\kappa$, das ist ein Widerspruch zu
$$(\tilde{\kappa})^{cf(\tilde{\kappa})} > \tilde{\kappa}.$$

Für $cf(c) > \omega$, beachte dass $c = 2^\omega$ und $c^\omega = (2^\omega)^\omega = 2^{\omega\cdot\omega} = 2^\omega = c$.

$\dashv$