6 Das Martin-Axiom [aus Ch. 14]

Def. • Im Kontext des Martin-Axioms (bzw. der Forcing Technik) ist eine Partialordnung "$\leq$" auf einer Menge P eine transitive und reflexive binäre Relation auf P.
Beachte: "$\leq$" ist nicht notwendigerweise anti-symmetrisch.
- Eine Menge P mit einer Partialordnung $\leq$ ist eine partiell geordnete Menge, bezeichnet mit $\mathbb{P} = (P, \leq)$.
- Die Elemente einer p.o. Menge P werden als Bedingungen bezeichnet.
- Zwei Bedingungen $p_1, p_2 \in P$ sind kompatibel ($p_1 | p_2$), falls ein $q \in P$ ex. mit $p_1 \leq q \geq p_2$; sonst sind p_1 und p_2 inkompatibel ($p_1 \perp p_2$).

Bsp. Ein Beispiel für eine p.o. Menge ist die Menge der endl. partiellen Funktionen $p: I \to J$ (für Mengen I und J).
Diese Menge wird mit $Fn(I, J)$ bezeichnet:
$p \in Fn(I, J)$ ist eine Fkt. mit $dom(p) \in fin(I)$ und $ran(p) \subseteq J$; und für $p, q \in Fn(I, J)$ definieren wir

$$p \leq q :\Longleftrightarrow dom(p) \subseteq dom(q) \wedge q|_{dom(p)} = p.$$
$$[\text{bzw. } p \subseteq q]$$

Def. Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine p.o. und sei $C \subseteq P$.
- C ist directed ..., offen (nach oben abg.) ..., nach unten abg., dicht [Bsp. $\{p \in Fn(I, J) : x \in dom(p)\}$], Filter (directed, nach unten abg.).
- Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(P)$ eine Menge von offen dichten Teilmengen von P. Ein Filter $G \subseteq P$ ist ein $\mathcal{D}$-generischer Filter auf P, falls $G \cap D \neq \emptyset$ für jede Menge $D \in \mathcal{D}$.

Proposition 6.1 (14.1) Ist $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine p.o. Menge und sei $\mathcal{D}$ eine abzählbare Menge von offen dichten Teilmengen von P. Dann ex. für jedes $q \in P$ ein $\mathcal{D}$-generischer Filter $G \subseteq P$ auf P mit $q \in G$.

Beweis: Sei $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ und $p_{-1} := q$. Für jedes $n \in \omega$ wählen wir ein $p_n \in D_n$ mit $p_n \geq p_{n-1}$ (möglich weil D_n dicht). Dann ist

$$G := \{p \in P : \exists n \in \omega \, (p \leq p_n)\}$$

ein $\mathcal{D}$-generischer Filter auf P mit $q \in G$. $\dashv$

[Bemerkung zur Existenz von $\mathcal{D}$-gen. Filtern für $|\mathcal{D}| \geq \omega_1$.]

Def. Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine p.o. Menge. Eine Menge $A \subseteq P$ ist eine Antikette falls irgend zwei versch. Bedingungen aus A inkompatibel sind. $\mathbb{P} = (P, \leq)$ erfüllt die abzählbare Kettenbedingung (ccc) wenn jede Antikette abzählbar ist (d.h. endl. oder unendl. abz.).

Martin Axiom (MA). Ist $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine p.o. Menge welche ccc erfüllt und ist $\mathcal{D}$ eine Menge von offen dichten Teilmengen von P mit $|\mathcal{D}| < \mathfrak{c}$, dann ex. ein $\mathcal{D}$-generischer Filter auf P.

MA(κ). Sei κ eine Kardinalzahl. MA(κ) ist MA aber $|\mathcal{D}| \leq \kappa$.

Bem. · MA(ω) gilt nach Prp. 6.1.
· MA($\mathfrak{c}$) ist falsch (später); $|\mathcal{D}| < \mathfrak{c}$ ist notwendig.
· MA für allg. $\mathbb{P} = (P, \leq)$ (d.h. ohne ccc)?

[Zuerst ein Beispiel, dass "MA(ω_1) ohne ccc" nicht gelten kann.]

<u>Faktum 6.2</u> (14.2) Es ex. eine nicht-ccc p.o. $\mathbb{P} = (P, \leq)$ und eine Menge $\mathcal{D}$ der Kard. ω_1, sodass kein Filter $G \subseteq P$ $\mathcal{D}$-generisch ist.

<u>Beweis:</u> Wir betrachten $\mathbb{P} = (Fn(\omega, \omega_1), \leq)$. Da die Menge

$$\{\{\langle 0, \alpha \rangle\} : \alpha \in \omega_1\}$$

eine überabz. Antikette ist, erfüllt $\mathbb{P}$ nicht ccc.

- Für jedes $\alpha \in \omega_1$ ist die Menge

$$D_\alpha := \{p \in Fn(\omega, \omega_1) : \alpha \in ran(p)\}$$

offen dicht. [Warum?]

- Für jedes $n \in \omega$ ist die Menge

$$E_n := \{p \in Fn(\omega, \omega_1) : n \in dom(p)\}$$

offen dicht [Warum?]

- Sei $\mathcal{D} := \{\mathcal{D}_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$, dann ist $|\mathcal{D}| = \omega_1$.
- Sei G ein $\mathcal{D}$-generischer Filter und sei $f_G := \bigcup G$. Dann ist $f_G : \omega \to \omega_1$ eine Bijektion, [Warum?] was der <u>Def.</u> von ω_1 widerspricht.

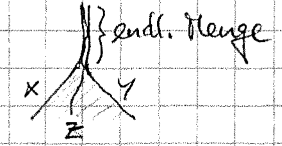
$\dashv$

[Bem. zur Forcing Technik; $V \rightsquigarrow V[G]$]

[Um zu zeigen, dass $|\mathcal{D}| < c$ nicht weggelassen werden kann, brauchen wir folgendes komb. Lemma.]

<u>Lemma 6.3</u> (14.3) Δ-System-Lemma.

Sei $\mathcal{E}$ eine überabz. Familie von endl. Mengen. Dann ex. eine überabz. Teilfamilie $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ und eine endl. Menge Δ, sodass für versch. Elemente $x, y \in \mathcal{C}$ immer gilt: $x \cap y = \Delta$.



Beweis: Es gilt entweder

(1) es gibt eine überabz. Familie $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, sodass für jedes $a \in \bigcup \mathcal{E}'$ gilt: $\{x \in \mathcal{E}' : a \in x\}$ ist abzählbar,

oder

(2) für jede überabz. Familie $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ ex. ein $a \in \bigcup \mathcal{E}'$, sodass gilt: $\{x \in \mathcal{E}' : a \in x\}$ ist überabzählbar.

Fall (1): Sei $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, $|\mathcal{E}'| \geq \omega_1$, und $\forall a \in \bigcup \mathcal{E}'$ gilt: $|\{x \in \mathcal{E}' : a \in x\}| = \omega$.

- Weil $|\bigcup \mathcal{E}'| > \omega$ gilt für jede abz. Menge $C \subseteq \bigcup \mathcal{E}'$, $|\{x \in \mathcal{E}' : x \cap C = \emptyset\}| \geq \omega_1$.
- Mit transfiniter Induktion konstr. wir $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \subseteq \mathcal{E}'$ von paarweise disjunkten Mengen: $x_0 \in \mathcal{E}'$ beliebig; und für $\mathcal{C}_\alpha := \{x_\xi : \xi \in \alpha \in \omega_1\} \subseteq \mathcal{E}'$ von paarweise disjunkten Mengen wählen wir x_α mit $x_\alpha \cap \bigcup \mathcal{C}_\alpha = \emptyset$.
- Dann hat $\mathcal{C} = \{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ die gewünschten Eigenschaften für $\Delta = \emptyset$.

Fall (2): Sei
$$v : \mathcal{E} \to \omega .$$
$$x \mapsto v(x) := |x|$$

- Weil $|\mathcal{E}| \geq \omega_1$ ex. $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ mit $|\mathcal{E}'| \geq \omega_1$ sodass $v|_{\mathcal{E}'}$ konstant ist; z.B. $v(x) = n$ (für alle $x \in \mathcal{E}'$). ($n \geq 2$, sonst wären wir nicht im Fall (2))
- Der Bew. ist mit Induktion nach $n \geq 2$: Für $n = 2$ ex. $a \in \bigcup \mathcal{E}'$ sodass $\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{E}' : a \in x\}$ überabz. ist. Dann hat $\mathcal{C}$ die gewünschten Eigenschaften mit $\Delta = \{a\}$.
- Das Lemma gelte für $n \geq 2$ und es sei $v(x) = n+1$ $(x \in \mathcal{E}')$. Weil ein $a_0 \in \bigcup \mathcal{E}'$ ex. mit $|\{x \in \mathcal{E}' : a_0 \in x\}| \geq \omega_1$, wenden wir das Lemma an auf $\mathcal{E}_n' := \{x \setminus \{a_0\} : x \in \mathcal{E}' \wedge a_0 \in x\}$.

· Damit erhalten wir eine Familie $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{E}'_n$ mit $|\mathcal{C}| \geq \omega_1$, und ein Δ_n, sodass für alle $x, y \in \mathcal{C}_n$, $x \neq y$ gilt: $x \cap y = \Delta_n$. Dann hat $\mathcal{C} = \{x \cup \{a_0\} : x \in \mathcal{C}_n\}$ die gewünschten Eigenschaften mit $\Delta = \Delta_n \cup \{a_0\}$. $\dashv$

Korollar 6.4 (14.4) Ist I beliebig und J abz., dann erfüllt $Fn(I, J)$ ccc.

[wir zeigen: $\mathcal{F}$ ist keine Antikette]

Beweis: Sei $\mathcal{F} \subseteq Fn(I, J)$ eine überabz. Familie von part. Fkt. Dann erfüllt $\mathcal{E} := \{dom(p) : p \in \mathcal{F}\}$ die Voraussetzungen des Δ-System-Lemmas, denn $|fin(J)| \leq \omega$.

· Mit dem Δ-System-Lemma ex. überabz. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ und eine endl. Menge Δ, ~~sodass~~ für alle $p, q \in \mathcal{C}$ mit $p \neq q$ gilt:

$$dom(p) \cap dom(q) = \Delta$$

· Weil J abz. ist, finden wir überabz. viele Funktionen in $\mathcal{C}$, welche auf Δ übereinstimmen. Diese Fkt. sind alle paarweise kompatibel und somit kann $\mathcal{F}$ keine Antikette sein. $\dashv$

Faktum 6.5 (14.5) MA(c) ist falsch.

Beweis: Sei $\mathbb{P} = (Fn(\omega, 2), \leq)$. Dann erfüllt $\mathbb{P}$ mit Kor. 6.4 ccc.

· Für jedes $g \in {}^{\omega}2$ ist

$$D_g := \{p \in Fn(\omega, 2) : (p(n) = 1 - g(n))\}$$

eine offen dichte Menge: D_g ist offen und für $p \notin D_g$ sei $q := p \cup \{\langle n, 1 - g(n)\rangle\}$ wobei $n \notin dom(p)$. Dann ist $p \leq q \in D_g$, also ist D_g dicht. Ähnlich zeigt man, dass für jedes $n \in \omega$, $D_n := \{p \in Fn(\omega, 2) : n \in dom(p)\}$.

· Sei nun $\mathcal{D} = \{D_g : g \in {}^{\omega}2\} \cup \{D_n : n \in \omega\}$. Dann ist $|\mathcal{D}| = c$.

· Ist $G \subseteq Fn(\omega, 2)$ ein $\mathcal{D}$-gen. Filter, so ist $\bigcup G : \omega \to 2$ und für jedes $g \in {}^{\omega}2$ ist $G \cap D_g \neq \emptyset$. D.h. für $f_G := \bigcup G$ gilt $f_G \neq g$. $\lightning$ zu $f_G \in {}^{\omega}2$. $\dashv$

Def. Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine p.o. Menge. Eine Menge $Q \subseteq P$ heisst <u>centred</u> falls jede endl. Teilmenge von Q eine obere Schranke besitzt, d.h. für jede endl. Teilmenge $\{q_0, \dots, q_{n-1}\} \subseteq Q$ ex. $p \in P$ mit $p \geq q_i$ (für alle $i \in n$). [p muss nicht zu Q gehören.]

- $\mathbb{P}$ ist nun <u>σ-centred</u> falls P eine abz. Vereinigung von centred Mengen ist.
- MA(σ-centred) ist MA, wobei ccc durch σ-centred ersetzt wird.

Bem. Aus der Def. folgt, dass jede p.o. Menge $\mathbb{P}$ die σ-centred ist auch ccc erfüllt.

<u>Theorem 6.6</u> (14.6) MA(σ-centred) $\Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

<u>Beweis</u>: Sei $\kappa < \mathfrak{c}$ eine unendl. Kardinalzahl und sei $\mathcal{F} = \{x_\alpha : \alpha \in \kappa\} \subseteq [\omega]^\omega$ eine Familie mit sfip der Kardinalität κ. Unter der Annahme von MA(σ-centred) konstruieren wir einen pseudo-Durchschnitt von $\mathcal{F}$.

- Sei P die Menge aller geordneten Paare $\langle s, E\rangle$ mit $s \in \mathrm{fin}(\omega)$ und $E \in \mathrm{fin}(\kappa)$ und sei

$$\langle s, E\rangle \leq \langle t, F\rangle \;:\Leftrightarrow\; s \subseteq t \wedge E \subseteq F \wedge (t \setminus s) \subseteq \bigcap \{x_\alpha \in \mathcal{F} : \alpha \in E\}$$

- Für $s \in \mathrm{fin}(\omega)$ sei $P_s := \{\langle s, E\rangle \in P : E \in \mathrm{fin}(\kappa)\}$. Dann hat jede endl. Menge $\{\langle s, E_1\rangle, \dots, \langle s, E_n\rangle\} \subseteq P$ eine obere Schranke $\langle s, \bigcup_{i=1}^{n} E_i\rangle$, und weil $\mathrm{fin}(\omega)$ abz. ist, $P = \bigcup_{s \in \mathrm{fin}(\omega)} P_s$ eine abz. Vereinigung von centred Mengen, d.h. $\mathbb{P}$ ist σ-centred.
- Für alle $\alpha \in \kappa$, $n \in \omega$ ist $D_{\alpha,n} := \{\langle s, E\rangle \in P : \alpha \in E \wedge |s| > n\}$ offen dicht. [Warum?]
- Sei $\mathcal{D} = \{D_{\alpha,n} : \alpha \in \kappa \wedge n \in \omega\}$. Dann ist $|\mathcal{D}| = \kappa < \mathfrak{c}$.
- Mit MA(σ-centred) ex. $\mathcal{D}$-generischer Filter $G \subseteq P$.
- Sei $x_G := \bigcup \{s \in \mathrm{fin}(\omega) : \exists E \in \mathrm{fin}(\kappa)(\langle s, E\rangle \in G)\}$. Dann ist $x_G \in [\omega]^\omega$ und aus $G \cap D_{\alpha,n} \neq \emptyset$ folgt, dass ein $\langle s, E\rangle \in G$ ex. mit

$\alpha \in E$ und $x_G \setminus s \subseteq x_\alpha$. Somit ist für jedes $\alpha \in \kappa$, $x_G \subseteq^* x_\alpha$, d.h. x_G ist ein pseudo-Durchschnitt von $\mathcal{F}$.

- Dies zeigt, dass für jedes $\kappa < \mathfrak{c}$, $\kappa < \mathfrak{p}$, und mit $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{c}$ muss gelten $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. ⊣

Als nächstes zeigen wir, dass für alle κ mit $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$ gilt: $2^\kappa = \mathfrak{c}$. Dazu beweisen wir zuerst folgendes

<u>Lemma 6.7</u> (14.7) Sei $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$ und sei $\mathcal{A} := \{x_\alpha : \alpha \in \kappa\} \subseteq [\omega]^\omega$ eine fast disjunkte Familie mit $|\mathcal{A}| = \kappa$. Sei weiter $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ irgend eine Teilfamilie und sei $\mathcal{C} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Sei $\mathcal{B} \neq \emptyset \neq \mathcal{C}$. Unter der Annahme von MA(σ-centred) ex. eine Menge $c \subseteq \omega$, sodass für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt:

$$|c \cap x| = \omega \iff x \in \mathcal{B} \quad (\text{bzw. } |c \cap x| < \omega \iff x \in \mathcal{C})$$

<u>Beweis</u>: Ähnlich wie in Thm. 6.6 sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ mit $\langle s, E\rangle \in P$ falls $s \in \mathrm{fin}(\omega)$, $E \in \mathrm{fin}(\mathcal{C})$ und

$$\langle s, E\rangle \leq \langle t, F\rangle \; :\iff \; s \subseteq t \wedge E \subseteq F \wedge (t \setminus s) \cap \bigcup E = \emptyset.$$

Wie in Thm. 6.6 lässt sich zeigen, dass $\mathbb{P}$ σ-centred ist.

- Für jedes $x_\gamma \in \mathcal{C}$ sei $D_{x_\gamma} := \{\langle s, E\rangle \in P : x_\gamma \in E\}$ eine offen dichte Menge in P; und für jedes $x_\beta \in \mathcal{B}$ und $k \in \omega$ sei

$$D_{x_\beta, k} := \{\langle s, E\rangle \in P : |s \cap x_\beta| \geq k\}$$

eine offen dichte Menge in P.

- Schliesslich sei $\mathcal{D} := \{D_{x_\gamma} : x_\gamma \in \mathcal{C}\} \cup \{D_{x_\beta, k} : x_\beta \in \mathcal{B} \wedge k \in \omega\}$. Dann ist, weil $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B} \cup \mathcal{C}| = \kappa < \mathfrak{c}$, $|\mathcal{D}| = \kappa < \mathfrak{c}$.
- Mit MA(σ-centred) ex. ein $\mathcal{D}$-gen. Filter $G \subseteq P$. Sei $c := \bigcup\{s \in \mathrm{fin}(\omega) : \exists E \in \mathrm{fin}(\mathcal{C})\ (\langle s, E\rangle \in G)\}$

Dann gilt für jedes $x_\beta \in \mathcal{B}$, $|c \cap x_\beta| = \omega$, und für jedes $x_\gamma \in \mathcal{C}$ gilt, $\underbrace{|c \cap x_\gamma| < \omega}_{\langle s, E\rangle \in G \cap D_{x_\gamma} \Rightarrow |c \cap x_\gamma| \leq |s|}$; somit hat c die gewünschten Eigenschaften. ⊣

Theorem 6.8 (14.8) Unter der Annahme MA(σ-centred) gilt für alle unendl. Kardinalzahlen $\kappa < \mathfrak{c}$, $2^\kappa = \mathfrak{c}$. Insbesondere ist $\mathfrak{c}$ regulär.

Beweis: Sei $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$. Zu zeigen: $2^\kappa = \mathfrak{c}$.

Sei $\mathcal{A} = \{x_\alpha : \alpha \in \kappa\} \subseteq [\omega]^\omega$ wie in Lemma 6.7 und für $u \in \mathcal{P}(\kappa)$ sei $\mathcal{B}_u := \{x_\alpha \in \mathcal{A} : \alpha \in u\}$.

- Mit Lem. 6.7 ex. $c_u \subseteq \omega$, sodass für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt:
  $$|c_u \cap x| = \omega \iff x \in \mathcal{B}_u.$$
- Für verschiedene $u, v \in \mathcal{P}(\kappa)$ erhalten wir somit immer $c_u \neq c_v$.
  [Beachte: $u \neq v$, dann ex. z.B. $\alpha \in u \setminus v$ mit $|c_u \cap x_\alpha| = \omega$ und $|c_v \cap x_\alpha| < \omega$.]
- Somit ist die Funktion
  $$\mathcal{P}(\kappa) \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)$$
  $$u \longmapsto c_u$$
  injektiv und wir erhalten $2^\kappa \leq 2^\omega = \mathfrak{c}$, und weil $\omega \leq \kappa$ gilt auch $2^\omega \leq 2^\kappa$, also haben wir $2^\kappa = \mathfrak{c}$.

- Um zu sehen, dass $\mathfrak{c}$ regulär ist, nehmen wir an, $\kappa = cf(\mathfrak{c}) < \mathfrak{c}$. Da gilt $\mathfrak{c} < \mathfrak{c}^{cf(\mathfrak{c})} = \mathfrak{c}^\kappa = (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa = \mathfrak{c}$, ist dies ein Widerspruch.

$\dashv$

Beispiel: Direkter Beweis für MA(σ-centred) $\Rightarrow \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$.

- $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ Ramsey Ultrafilter (bzw. Q-point): ∘ Existenz mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ (Thm. 6.6 & Prp. 5.9)
  ∘ $\mathcal{U}$ ist eine dominating family (Übung 26.(c))

ℙ ist σ-centred

- Bedingungen $\langle s, x\rangle$ mit $s \in seq(\omega)$ endl. streng monoton wachsend $x \in \mathcal{U}$, $x \cap \max(s) = \emptyset$; $\langle s, x\rangle \leq \langle t, y\rangle :\iff s \leq t \wedge x \subseteq y \wedge (t \setminus s) \subseteq x$
- $\mathcal{F} \subseteq {}^\omega\omega$ mit $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c}$
- Für $g \in \mathcal{F}$ sei $D_g := \{\langle s, x\rangle : g <^* f_{s^\frown x}\} \rightsquigarrow f_G$ dominiert $\mathcal{F}$ ...) → $\mathcal{F}$ nicht unbounded.