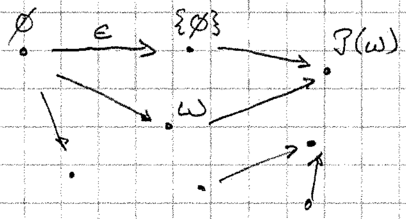
Modelle von ZF



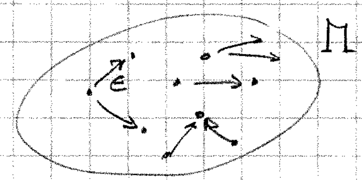
Wie "sehen" die Mengen aus?

Was für Mengen gibt es?

Gödel'scher Vollständigkeitssatz: ZF konsistent $\Leftrightarrow$ es ex. Modell von ZF

[wobei ein Modell eine Realisierung der Axiome durch Objekten und deren Beziehung ist; Bsp. Gruppen sind Modelle von GT]

Sei nun M ein Modell von ZF, d.h.



In M definieren wir eine Teilklasse $V \subseteq M$ und zeigen dann $V = M$.

[G Gruppe, $|G| = n \Rightarrow G \cong H \leq S_n$]

- $V_0 := \emptyset$
- $V_\alpha := \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta$ für α Limes OZ.
- $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$ für $\alpha \in \Omega$.

Schliesslich sei $V := \bigcup_{\alpha \in \Omega} V_\alpha$.

Mit dem TRT ex. Klassenfunktion $G : \Omega \to M$ mit $G(\alpha) = V_\alpha$ für alle $\alpha \in \Omega$, wobei $V_\alpha \in M$ eine Menge ist.

Faktum 1.11 (3.11)

(a) V_α ist transitiv.

(b) Die Klasse V ist transitiv.

(c) Ist $\alpha \in \beta$, dann ist $V_\alpha \subsetneq V_\beta$.

(d) $\alpha \subseteq V_\alpha$ und $\alpha \in V_{\alpha+1}$.

Beweis: (Skizze) (a) $\alpha = \beta + 1$; V_β transitiv; $y \in x \in V_\alpha \Rightarrow y \in x \subseteq V_\beta$

$$\Rightarrow y \in V_\beta \underset{V_\beta \text{ trans.}}{\Longrightarrow} y \subseteq V_\beta \underset{V_\alpha = \mathcal{P}(V_\beta)}{\Rightarrow} y \in V_\alpha$$

(b) klar

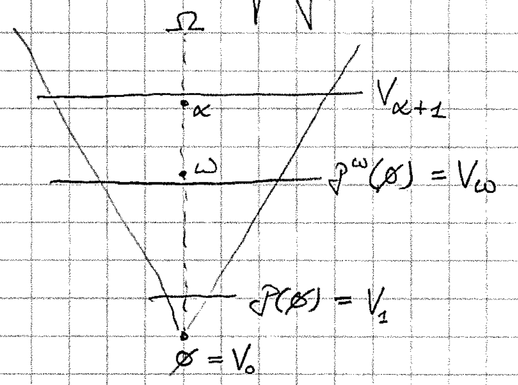
(c) $\beta = \alpha + 1$; $V_\alpha \in V_\beta$ und weil V_β trans., ist $V_\alpha \subseteq V_\beta$

weiter ist $V_\alpha \notin V_\alpha$, also folgt mit $V_\alpha \in V_\beta$: $V_\alpha \subsetneq V_\beta$.

(d) $\alpha \subseteq V_\alpha \Rightarrow \alpha \in V_{\alpha+1}$ klar

$\alpha \subseteq V_\alpha$ mit Fallunterscheidung ($\alpha = \beta+1$, α Limit) und transf. Ind. $\dashv$

Die Klasse V sieht wie folgt aus:



kummulative Hierarchie

[besteht aus Mengen von Mengen von .... der leeren Menge]

Theorem 1.12 (3.12) Für jede Menge x im Modell M ex. eine Ordinalzahl $\alpha \in \Omega$, sodass $x \in V_\alpha$. Insbesondere ist $M = V$.

Beweis: Wir nehmen an, es ex. eine Menge $x \in M \setminus V$.

- Sei $\bar{x} := TC(\{x\})$ und sei $w := \{ z \in \bar{x} : z \notin V \}$, d.h. $w = \bar{x} \setminus \{ z' \in \bar{x} : \exists \alpha \in \Omega \, (z' \in V_\alpha) \}$.
- w ist eine Menge in M mit $x \in w$, d.h. $w \neq \emptyset$.
- Mit dem Fund.-Axiom ex. $z_0 \in w$ mit $z_0 \cap w = \emptyset$.
- Weil $z_0 \in w$ ist $z_0 \notin V$, und weil $z_0 \cap w = \emptyset$ ex. für jedes $u \in z_0$ ein kl. $\alpha_u \in \Omega$ mit $u \in V_{\alpha_u}$.
- Mit dem Ersetzungsaxiom ist $\{\alpha_u : u \in z_0\}$ eine Menge und es ist $\alpha = \bigcup \{\alpha_u : u \in z_0\} \in \Omega$.
- Somit ist $z_0 \subseteq V_\alpha$, bzw. $z_0 \in V_{\alpha+1}$ $\lightning$ zu $z_0 \notin V$

$\dashv$

Folgerung: Jedes Modell von ZF hat die Struktur der kummulativen Hierarchie.