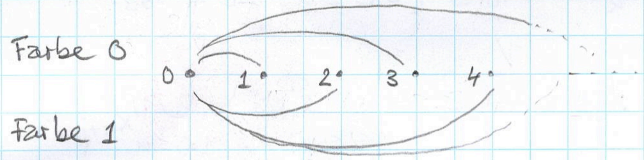
4 Der Satz von Ramsey [aus Ch. 4]

Theorem 4.1 (Satz von Ramsey) (4.1)

Für jedes $n \in \omega$, für jedes positive $r \in \omega$, für jede Menge $S \in [\omega]^\omega$ und für jede Färbung $\pi : [S]^n \to r$ existiert ein $H \in [S]^\omega$, sodass $\pi|_{[H]^n}$ konstant ist, d.h. $[H]^n$ ist monochromatisch; H heisst homogen.

Lemma 4.2 (4.2) $n = 2$; $r = 2$ $(S = \omega)$

Beweis: Sei $\pi : [\omega]^2 \to 2$ eine 2-Färbung der 2-elem. Teilmengen von ω. (Der Fall $r > 2$ beliebig ist analog.)



Wir betrachten $\tau_0 : \omega \setminus \{0\} \to 2$

$n \mapsto \pi(\{0, n\})$

... (Schubfachprinzip)

$\dashv$

zum Beweis von Thm. 4.1: Mit Induktion nach n.

- $n = 2$ ist Lemma 4.1
- Sei der Satz bewiesen für ein $n \geq 2$:
  - $\pi : [\omega]^{n+1} \to r$ eine r-Färbung
  - Für $H_i \in [\omega]^\omega$ und $a_i := \min(H_i)$ sei $\tau_i : [H_i \setminus \{a_i\}]^n \to r$

    $\{b_1, b_n\} \mapsto \pi(\{a_i, b_1, .. b_n\})$

    eine r-Färbung der n-elem. Teilmengen von $H_i \setminus \{a_i\}$
  - Sei $H_{i+1} \in [H_i]^\omega$ homogen (nach Vor.) für τ_i mit Farbe $\rho_{a_i} \in r$, dann färben wir a_i mit Farbe ρ_{a_i}.
  - Sei $H_0 = \omega$. Dann erhalten wir eine Sequenz $0 = a_0 < a_1 < \ldots$ und unendl. Mengen $\omega = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots$, sodass

    $\pi(\{\underbrace{a_i}_{\in H_i}, \underbrace{b_1, \ldots, b_n}_{\subseteq H_i}\}) = \rho_{a_i} \in r$ und es ex. $\rho \in r$, sodass

    $|\{a_i : i \in \omega \wedge \rho_{a_i} = \rho\}| = \omega$, d.h. $\{a_i : \ldots\}$ hom. $\dashv$