5 ULTRAFILTER [aus Ch. II]

Sei S eine nicht-leere Menge und sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$.
Dann ist $\mathcal{F}$ ein Filter/Ideal über S bzw. auf $\mathcal{P}(S)$, falls gilt:

Filter	Ideal
• $\emptyset \notin \mathcal{F} \wedge S \in \mathcal{F}$	• $\emptyset \in \mathcal{F} \wedge S \notin \mathcal{F}$
• $x \in \mathcal{F} \wedge y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \cap y \in \mathcal{F}$	• $x \in \mathcal{F} \wedge y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \cup y \in \mathcal{F}$
• $x \in \mathcal{F} \vee y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \cup y \in \mathcal{F}$	• $x \in \mathcal{F} \vee y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \cap y \in \mathcal{F}$

Filter über ω:

- Ist $\underset{x \neq \emptyset}{x \subseteq \omega}$, so ist $\mathcal{F}_x := \{y \subseteq \omega : x \subseteq y\}$ ein Filter.
  Weil $\mathcal{F}_x$ durch ein Element erzeugt wird, heisst $\mathcal{F}_x$ Hauptfilter; analog heissen Ideale, welche durch ein Element erzeugt werden Hauptideale. [wohl eher umgekehrt]

- Die Menge $\mathcal{F} = \{x \subseteq \omega : |\omega \setminus x| \text{ ist endlich}\}$ ist ein Filter, der sogenannte Fréchet Filter; analog Fréchet Ideal.
  Der Fréchet Filter ist kein Hauptfilter.

Ist $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Filter über S, so ist $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter falls gilt:

$$\forall x \subseteq S \; (x \in \mathcal{U} \vee (S \setminus x) \in \mathcal{U})$$

Ist $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Ideal über S, so ist $\mathcal{I}$ ein Primideal falls gilt:

$$\forall x \subseteq S \; (x \in \mathcal{I} \vee (S \setminus x) \in \mathcal{I})$$

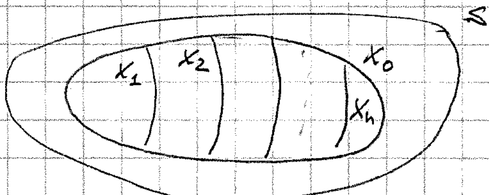
Bem.
- Jeder Ultrafilter ist ein Filter und jedes Primideal ist ein Ideal.
- Hauptultrafilter sind Ultrafilter die Hauptfilter sind.
- Ist $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Ultrafilter, so ist $\{x \subseteq S : (S \setminus x) \in \mathcal{U}\}$ ein Primideal.

<u>Faktum 5.1</u> Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Ultrafilter und $x_0 \in \mathcal{U}$.

(a) Ist $x_0 = x_1 \dot\cup x_2 \dot\cup \dots \dot\cup x_n$, so ex. genau ein i_0 mit $1 \le i_0 \le n$, sodass $x_{i_0} \in \mathcal{U}$.

(b) Ist x_0 endlich, so ist $\mathcal{U}$ ein Hauptultrafilter. (Singleton als erzeugendes Element)

<u>Beweis:</u> (a)



$x_0 = x_1 \dot\cup \bigcup_{2 \le i \le n} x_i$; • ist $x_1 \in \mathcal{U}$, dann ist $\bigcup_{2 \le i \le n} x_i \notin \mathcal{U}$.

• ist $x_1 \notin \mathcal{U}$, dann ist $\bigcup_{2 \le i \le n} x_i = \underbrace{(S \setminus x_1)}_{\in \mathcal{U}} \cap \underbrace{x_0}_{\in \mathcal{U}}$ in $\mathcal{U}$ und wir fahren fort mit x_1.

(b) Folgt aus (a) mit $x_0 = \{a_1, \dots, a_n\} = \{a_1\} \dot\cup \{a_2\} \dot\cup \dots \dot\cup \{a_n\}$.

⊣

<u>Faktum 5.2</u> Es gibt höchstens $2^{2^{|S|}}$ Ultrafilter über S.

<u>Beweis:</u> Jeder Ultrafilter über S ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(S)$, d.h. es gibt höchstens $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))| = 2^{2^{|S|}}$ Ultrafilter über S. (vgl. mit Aufgabe 25)

⊣

<u>Theorem 5.3</u> (Ultrafiltertheorem) (6.7 allgemeiner)

Jeder Filter $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ lässt sich zu einem Ultrafilter $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ erweitern.

<u>Beweis:</u> Aufgabe 24.

[Bemerkungen zum Primidealtheorem, P_n und zu AC]

- $P_3 \Rightarrow P_n$ (für alle $n \geq 1$)
- $P_2 \not\Rightarrow P_3$
- $P_3 \Leftrightarrow PIT$

Ultrafilter über ω: (wir betrachten nur Ultrafilter welche den Fréchet Filter enth. also Ultrafilter $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$

- Ein Filter $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ist ein Ramsey Filter, falls für jede 2-Färbung $\pi: [\omega]^2 \to 2$ ein $x \in \mathcal{U}$ existiert, sodass x homogen ist, d.h. $\pi|_{[x]^2}$ ist konstant.

Faktum 5.4 Jeder Ramsey Filter $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ist ein Ultrafilter.

Beweis: Für jedes $x \in [\omega]^\omega$ sei $\pi_x: [\omega]^2 \to 2$

$$\{n,m\} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } |\{n,m\} \cap x| = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Ramsey Filter, so enthält $\mathcal{U}$ für jedes $x \in [\omega]^\omega$ entweder x oder $(\omega \setminus x)$, d.h. $\mathcal{U}$ ist ein Ultrafilter (also ein Ramsey Ultrafilter). ⊣

- Ein Ultrafilter $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ist ein P-point, falls für jede unendl. Partition $\{u_n : n \in \omega\}$ von ω entweder ein (genau ein) $n \in \omega$ ex. mit $u_n \in \mathcal{U}$, oder es ex. $x \in \mathcal{U}$ mit $x \cap u_n$ endl. für alle $n \in \omega$.

[Begriff "Partition" erklären]

[Bem. zu endl. Partitionen: Fct. 5.1 (a)]

- Ein Ultrafilter $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ist ein Q-point, falls für jede Partition $\{u_n : n \in \omega\}$ von ω in endl. Teile (d.h. u_n endl.) ein $x \in \mathcal{U}$ ex. sodass $|x \cap u_n| \leq 1$ für alle $n \in \omega$.

Alternative Definitionen:

Faktum 5.5 (II.12 (a) & (b)) $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ist genau dann ein P-point wenn es für jede unendl. Folge $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ ein $x \in \mathcal{U}$ gibt, sodass $x \subseteq^* x_n$ (für alle $n \in \omega$). [von da kommt der Name P-Punkt]

Bem. $\beta\omega^*$

Beweis: ($\Leftarrow$) Sei $\{u_n : n \in \omega\}$ eine unendl. Partition von ω.

- Ist $u_{n_0} \in \mathcal{U}$ für ein $n_0 \in \omega$, so sind wir fertig.
- Andernfalls betrachten wir die Folge $\underbrace{\omega}_{x_0} \supseteq \underbrace{\omega \setminus \overbrace{u_0}^{\notin \mathcal{U}}}_{x_1} \supseteq \underbrace{\omega \setminus \overbrace{(u_0 \cup u_1)}^{\notin \mathcal{U}}}_{x_2} \ldots \in \mathcal{U}$ von Elementen aus $\mathcal{U}$.
- Gilt $x \subseteq^* x_n$ (für alle $n \in \omega$), so ist $|x \cap u_n|$ endl. für alle $n \in \omega$.

(⟹) Sei $\{x_n : n\in\omega\} \subseteq \mathcal{U}$ eine unendliche Folge von Elementen aus $\mathcal{U}$.

- Ist $\bigcap_{n\in\omega} x_n \in \mathcal{U}$, so sind wir fertig.
- Andernfalls betrachten wir die Folge

$$\underbrace{\overset{\in\mathcal{U}}{x_0}}_{y_0} \supseteq \underbrace{\overset{\in\mathcal{U}}{x_0\cap x_1}}_{y_1} \supseteq \dots \supseteq \underbrace{\overbrace{x_0\cap\dots\cap x_n}^{\in\mathcal{U}}}_{y_n} \supseteq \dots$$

wobei wir annehmen dürfen, dass $y_n \supsetneqq y_{n+1}$ (weil $\bigcap x_n \notin \mathcal{U}$)

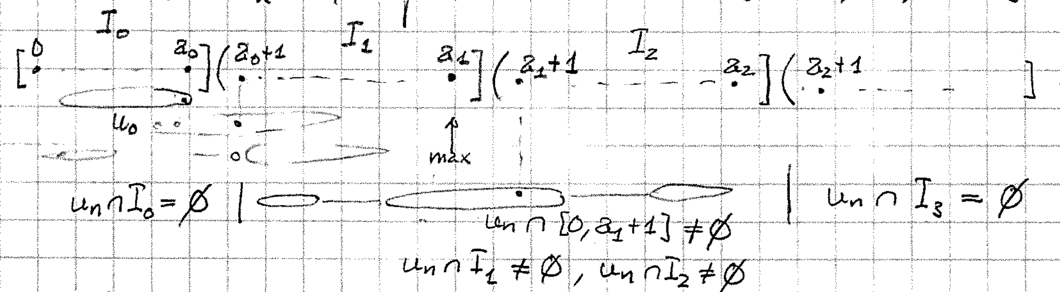
- Dann ist, für $\overset{\notin\mathcal{U}}{u_0} := (\omega \setminus x_0) \cup \bigcap_{n\in\omega} x_n$ (falls $u_0 \neq \emptyset$) und $u_{n+1} := \overbrace{y_n \setminus y_{n+1}}^{\notin\mathcal{U}}$, $\{u_n : n\in\omega\}$ eine unendl. Part. von ω, und für $x\in\mathcal{U}$ mit $|x\cap u_n| < \omega$ gilt $x \subseteq^* y_n$ (für alle $n\in\omega$), also auch $x \subseteq^* x_n$. ⊣

<u>Faktum 5.6</u> (11.10) $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ist genau dann ein Q-point, wenn es für jede Intervallpartition $\{\underbrace{[a_n, b_n]}_{I_n} : a_n < b_n, a_{n+1} = b_n + 1\}$ von ω ein $x\in\mathcal{U}$ gibt mit $|I_n \cap x| \leq 1$.

<u>Beweis:</u> (⟹) Jede Intervallpartition von ω ist eine Partition von ω in endl. Teile (I_n ist endl. für alle $n\in\omega$).

(⟸) Sei $P = \{u_n : n\in\omega\}$ eine Partition von ω in endl. Teile.

- Sei $a_0 := \max(u_0)$ und für $m\in\omega$ sei
$$a_{m+1} := \max\{\max(u_n) : u_n \in P \wedge u_n \cap [0, a_m+1] \neq \emptyset\}.$$
- Weiter sei $I_0 := [0, a_0]$ und $I_{m+1} := (a_m, a_{m+1}]$.
- Weil $\{I_n : n\in\omega\}$ eine Intervallpartition von ω ist, ex. mit unserer Annahme ein $x_0 \in \mathcal{U}$, sodass $|x_0 \cap I_n| \leq 1$ (für alle $n\in\omega$).
- Nach Konstruktion folgt aus $u_n \cap I_m \neq \emptyset$ (für $n, m\in\omega$), dass $u_n \cap I_k = \emptyset$ für alle $k \in \omega \setminus \{m-1, m, m+1\}$



- u_n hat einen nicht-leeren Durchschnitt mit höchstens zwei Intervallen I_{m-1}, I_m, I_{m+1}.

• Somit gilt $|x_0 \cap u_n| \le 2$ für alle $n \in \omega$, und falls $|x_0 \cap u_n| = 2$, so ex. $m \in \omega$ mit

$$|x_0 \cap u_n \cap I_m| = |x_0 \cap u_n \cap I_{m+1}| = 1.$$

• Seien nun $x_1 := \{x_0 \cap I_{2m} : m \in \omega\}$ und $x_2 := \{x_0 \cap I_{2m+1} : m \in \omega\}$. Dann ist $|x_1 \cap u_n| = |x_2 \cap u_n| = 1$ für alle $n \in \omega$ und weil $x_0 = x_1 \cup x_2 \in \mathcal{U}$, ist entweder $x_1 \in \mathcal{U}$ oder $x_2 \in \mathcal{U}$, d.h. $\mathcal{U}$ ist ein Q-point. $\dashv$

<u>Proposition 5.7</u> (11.7) Sei $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Ultrafilter. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $\mathcal{U}$ ist ein Ramsey Ultrafilter.

(b) Ist $\{u_k : k \in \omega\}$ eine unendliche Partition von ω, so existiert entweder ein $k \in \omega$ mit $u_k \in \mathcal{U}$, oder es ex. ein $x \in \mathcal{U}$ mit $|x \cap u_k| \le 1$ für alle $k \in \omega$.

(c) Für jede absteigende Folge $y_0 \supseteq y_1 \supseteq \dots \supseteq y_n \supseteq \dots$ von Elementen aus $\mathcal{U}$ ex. eine monoton wachsende Fkt. $f \in {}^\omega\omega$ sodass $f[\omega] \in \mathcal{U}$, $f(0) \in y_0$ und für alle $k \in \omega$ ist $f(k+1) \in y_{f(k)}$.

<u>Beweis:</u> (a) $\Rightarrow$ (b) Für jede unendl. Partition $P = \{u_k : k \in \omega\}$ von ω definieren wir $\pi : [\omega]^2 \to 2$ mit

$$\pi(\{n,m\}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \{n,m\} \in u_k \text{ für ein } u_k \in P, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann hat jedes homogene $x \in \mathcal{U}$ die in (b) verlangte Eigenschaft.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sei $y_0 \supseteq y_1 \supseteq \dots$ eine absteigende Folge von Elementen aus $\mathcal{U}$.

• Ist $y = \bigcap_{n \in \omega} y_n \in \mathcal{U}$, so hat f_y die gewünschten Eigenschaften.

• Sei also $\bigcap_{n \in \omega} y_n \notin \mathcal{U}$ und nehmen wir an, dass für alle $n \in \omega$, $y_n \setminus y_{n+1} \neq \emptyset$.

• Betrachte die Partition $\{(\omega \setminus y_0) \cup \bigcap_{n \in \omega} y_n\} \cup \{y_n \setminus y_{n+1} : n \in \omega\} \cap \mathcal{U} = \emptyset$.

• Mit (b) ex. $x = \{a_n : n \in \omega\} \in \mathcal{U}$ mit $x \cap (y_n \setminus y_{n+1}) = \{a_n\}$, insbes. $x \cap \bigcap y_n = \emptyset$.

- Sei $g \in {}^\omega\omega$ eine streng monoton wachsende Funktion mit $g(0) > 0$, $g[\omega] \subseteq x$ und $x \setminus g(n) \subseteq y_n$ für alle $n \in \omega$.

- Für $k \in \omega$ sei $g^{k+1}(0) = g(g^k(0))$ mit $g^0(0) := 0$.
- Da $\mathcal{U} \in [\omega]^\omega$ ein Ultrafilter ist, ist

  entweder $u_0 = \bigcup_{k \in \omega} [g^{2k}(0), g^{2k+1}(0))$ oder $u_1 = \omega \setminus u_0$ in $\mathcal{U}$.

- Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $u_0 \in \mathcal{U}$, d.h. auch $x \cap u_0 \in \mathcal{U}$.
- Mit (b) ex. nun ein $z = \{c_k : k \in \omega\} \overset{\in \mathcal{U}}{\subseteq} x$, sodass für alle $k \in \omega$ gilt:

$$z \cap [g^{2k}(0), g^{2k+1}(0)) = \{c_k\}$$

- Nach Konstruktion gilt $c_{k+1} > g(c_k)$: Beachte dass $c_k < g^{2k+1}(0)$ und $c_{k+1} \geq g^{2k+2}(0) = g(g^{2k+1}(0)) > g^{2k+1}(0) > c_k$.
- Nach Definition von g erhalten wir $x \setminus g(c_k) \subseteq y_{c_k}$, und weil $c_{k+1} \in x$ ist, gilt

$$c_{k+1} \in y_{c_k} \quad (\text{für alle } k \in \omega).$$

- Setzen wir $f(k) := c_k$, so hat f die gewünschten Eigenschaften.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sei $\pi : [\omega]^2 \to 2$ eine beliebige 2-Färbung.

- Mit dem Satz von Ramsey konstruieren wir zuerst eine Familie $\{x_s : s \in fin(\omega)\} \subseteq \mathcal{U}$ wie folgt: $x_\emptyset := \omega$, und sei $x_{\{0\}} \subseteq \omega \setminus \{0\}$ sodass für alle $k, k' \in x_{\{0\}}$ gilt: $\pi(\{0,k\}) = \pi(\{0,k'\})$.

  Allgemein: Ist $x_s \in \mathcal{U}$ definiert für ein $s \in fin(\omega)$ und ist $n > \bar{s} := \max(s)$, so hat $x_{s \cup \{n\}} \subseteq x_s \setminus n^+$ die Eigenschaft, dass für alle $k, k' \in x_{s \cup \{n\}}$ gilt: $\pi(\{n,k\}) = \pi(\{n,k'\})$.

  Weil $x_s \in \mathcal{U}$ und n^+ endl. ist, ist auch $x_{s \cup \{n\}} \in \mathcal{U}$.

<u>Beh.</u> Es ex. ein $x_0 \in \mathcal{U}$, sodass für alle $s \in fin(\omega)$ gilt:

$$\bar{s} \in x_0 \Rightarrow (x_0 \setminus \bar{s}^+) \subseteq x_s$$

Bew. Für jedes $i \in \omega$ sei

$$y_i := \bigcap \{x_s : \bar{s} \leq i\}.$$

Dann ist $y_i \in \mathcal{U}$ und $y_{i+1} \subseteq y_i$. Mit (c) ex. $f \in {}^\omega\omega$, sodass $f[\omega] \in \mathcal{U}$ und $f(k+1) \in y_{f(k)}$.

- Sei $x_0 := f[\omega]$ und sei $s \in \mathrm{fin}(\omega)$ mit $\bar{s} \in x_0$. Dann ex. $n \in \omega$ mit $f(n) = \bar{s}$ und für jedes $k \in x_0 \setminus \bar{s}^+$ ex. $m_k > n$ mit $k = f(m_k)$; insbes. ist $k \in y_{f(n)}$.
- Nun ist $\bar{s}^+ = f(n)+1$, und weil $y_{f(n)} \subseteq x_s$, erhalten wir $k \in x_s$.
- Damit gilt für alle $s \in \mathrm{fin}(\omega)$ mit $\bar{s} \in x_0$, $x_0 \setminus \bar{s}^+ \subseteq x_s$.

Beh. ⊣

- Wir definieren nun die 2-Färbung $\tau : x_0 \to 2$ durch

$$\tau(n) := \begin{cases} 0 & \text{falls es ein } k \in x_0 \setminus n^+ \text{ gibt mit } \pi(\{n,k\}) = 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Weil $x_0 \in \mathcal{U}$ und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, ex. $y_0 \subseteq x_0$, $y_0 \in \mathcal{U}$ mit $\tau|_{y_0}$ ist konst., d.h. $\pi|_{[y_0]^2}$ ist konst. und y_0 ist homogen. ⊣

Korollar 5.8 (11.11) $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ist genau dann ein Ramsey Ultrafilter, wenn $\mathcal{U}$ sowohl ein P-point wie auch ein Q-point ist.

Beweis: ($\Rightarrow$) folgt direkt aus Proposition 5.7.

($\Leftarrow$) Sei $\mathcal{U}$ ein P-point und ein Q-point und sei $\{u_n : n \in \omega\}$ eine unendl. Partition von ω. Ist $u_{n_0} \in \mathcal{U}$ für ein $n_0 \in \omega$, so sind wir fertig. Andernfalls ex. ein $y_0 \in \mathcal{U}$ mit $|y_0 \cap u_n| < \omega$ für alle $n \in \omega$ weil $\mathcal{U}$ ein P-point ist. Für $n \in \omega$ sei $I_{2n} := y_0 \cap u_n$ und für $\{a_i : i \in \omega\} = \omega \setminus \bigcup_{n\in\omega} \{I_{2n} : n \in \omega\}$ sei $I_{2n+1} := \{a_n\}$.

Dann ist $\{I_m : m \in \omega\}$ eine Partition von ω in endl. Teile und weil $\mathcal{U}$ ein Q-point ist, ex. $y_1 \in \mathcal{U}$ mit $|y_1 \cap I_m| \leq 1$ für alle $m \in \omega$. Für $x := y_0 \cap y_1$ gilt dann $x \in \mathcal{U}$ und $|x \cap u_n| \leq 1$ für alle $n \in \omega$. ⊣

Proposition 5.9 (11.9) Ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, dann ex. ein Ramsey Ultrafilter $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$.
(Aufgabe 30: $\mathfrak{p} = \mathfrak{c} \Rightarrow$ es ex. $2^\mathfrak{c}$ versch. Ramsey Ultrafilter)

Beweis: Sei $\{\pi_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ eine Nummerierung aller 2-Färbungen von $[\omega]^2$.
[Bem. Es gibt genau $\mathfrak{c}$ Funktionen $\pi : [\omega]^2 \to 2$]
Mit transfiniter Induktion konstruieren wir zuerst eine Sequenz $\langle x_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c} \rangle \subseteq [\omega]^\omega$, sodass $\{x_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ die sfip hat, durch $\subseteq^*$ wohlgeordnet ist ($\alpha < \beta \Rightarrow x_\beta \subseteq^* x_\alpha$), und für alle $\alpha \in \mathfrak{c}$ gilt:
$\pi_\alpha | [x_{\alpha+1}]^2$ ist konst.

- Sei $x_0 := \omega$ und nehmen wir an, x_β für $\beta \in \alpha$ sei bereits konstruiert für ein $\alpha \in \mathfrak{c}$, sodass $\{x_\beta : \beta \in \alpha\}$ die sfip hat, und für alle $\gamma + 1 \in \alpha$ gilt: $\pi_\gamma |_{[x_{\gamma+1}]^2}$ ist konstant.

- Ist $\alpha = \beta_0 + 1$, so sei $x_\alpha \in [x_{\beta_0}]^\omega$ mit $\pi_{\beta_0} |_{[x_\alpha]^2}$ konstant.

- Ist α eine Limesordinalzahl, so sei x_α ein pseudo-Durchschnitt von $\{x_\beta : \beta \in \alpha\}$; weil $\alpha \in \mathfrak{c} = \mathfrak{p}$ ex. solch ein x_α.

- Dann hat hat die Familie $\{x_\beta : \beta \in \alpha\} \cup \{x_\alpha\}$ die verlangten Eigenschaften.

- Die Familie $\mathcal{E} = \{x_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ hat ebenfalls die sfip und zudem hat $\mathcal{E}$ die Eigenschaft, dass für jede 2-Färbung $\pi_\alpha : [\omega]^2 \to 2$ ein $x_{\alpha+1} \in \mathcal{E}$ ex. sodass $\pi_\alpha |_{[x_{\alpha+1}]^2}$ konst. ist.

- Erweitern wir die Familie $\mathcal{E}$ zu einem Ultrafilter $\mathcal{U}$, so ist $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Ramsey Ultrafilter.

$\dashv$