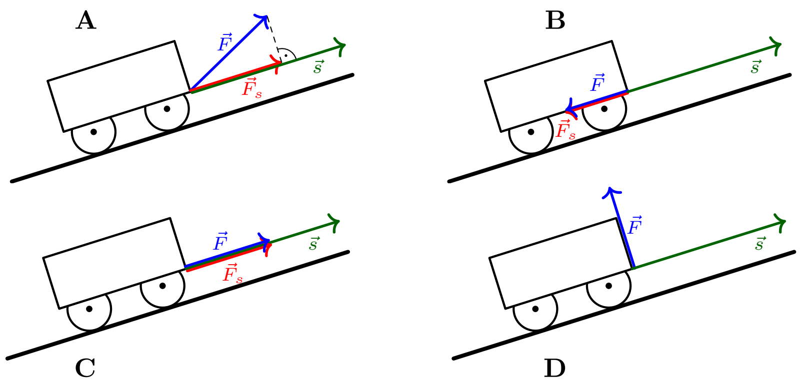
D-MAVT | Lineare Algebra II | FS 2023

Prof. Dr. N. Hungerbühler

Bonusaufgabe 8

Aufgabe 8.1

Betrachten Sie die folgenden Skizzen, welche je eine Situation darstellen, in welcher ein Wagen mit der Kraft $\vec{F}$ entlang einer Steigung gezogen wird.



Rufen Sie sich den folgenden Zusammenhang aus dem Physikunterricht in Erinnerung: Lediglich diejenige Kraftkomponente von $\vec{F}$, welche entlang der Bewegungsrichtung wirkt, trägt zur verrichteten physikalischen Arbeit bei. Diese Kraftkomponente ist in den Skizzen mit $\vec{F}_s$ bezeichnet. Das Ziel der folgenden Aufgabe ist es, mit Hilfe von Skalarprodukten einen Ausdruck für $\vec{F}_s$ zu finden. Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben in chronologischer Reihenfolge.

Betrachten Sie die zwei Vektorenpaare $\vec{F}_s$ und $\vec{s}$ sowie $\vec{s}$ und $(\vec{F}-\vec{F}_s)$. Vergleichen und kontrastieren Sie jeweils die zwei Vektoren geometrisch und algebraisch für jede der gegebenen Skizzen A-D und tragen Sie Ihre Beobachtungen in die untenstehenden Tabellen ein. Orientieren Sie sich dabei an den Beispielantworten. Begründen Sie Ihre Antworten.

	geometrischer Vergleich $\vec{F}_s$ vs. $\vec{s}$	**algebraischer Vergleich $\vec{F}_s$ vs. $\vec{s}$**
A		
B	*Der Vektor $\vec{F}_s$ zeigt in die entgegengesetzte Richtung von $\vec{s}$ und ist kürzer als $\vec{s}$.*	
C		*Es existiert eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$,* so dass $0 < \lambda < 1$ und $\vec{F}_s = \lambda \vec{s}$.
D		

	geometrischer Vergleich $\vec{s}$ vs. $(\vec{F} - \vec{F}_s)$	**algebraischer Vergleich $\vec{s}$ vs. $(\vec{F} - \vec{F}_s)$**
A		
B		
C		
D		

Die folgenden beiden Relationen formalisieren die Beobachtungen aus der vorhergehenden Teilaufgabe:

i. $\vec{F}_s = \lambda \cdot \vec{s}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

ii. $(\vec{F} - \vec{F}_s)$ und $\vec{s}$ sind orthogonal, d.h. $\langle \vec{F} - \vec{F}_s,\, \vec{s} \rangle = 0$

Unter Verwendung dieser beider Relationen, möchten wir einen Ausdruck für $\vec{F}_s$ finden, der nur von $\vec{s}$ und $\vec{F}$ abhängt.Ordnen Sie die Aussagen a. bis f., um eine formal korrekte Herleitung dieses Ausdrucks zu erhalten. Nehmen Sie ausserdem an, dass $\vec{s} \neq \vec{0}$ gilt.

a. $\vec{F}_s = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle}{\langle \vec{s}, \vec{s} \rangle} \vec{s}$

b. $\langle \vec{F} - \lambda \vec{s}, \vec{s} \rangle = 0$

c. $\vec{F}_s = \lambda \vec{s}$

d. $\lambda = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle}{\langle \vec{s}, \vec{s} \rangle}$

e. $\langle \vec{F} - \vec{F}_s, \vec{s} \rangle = 0$

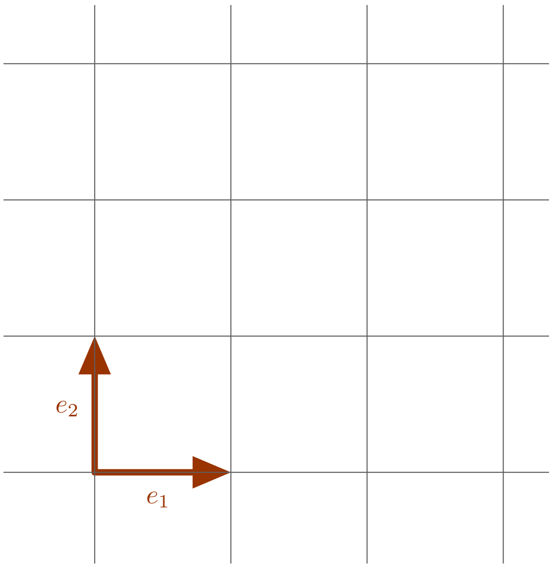
f. $\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle - \lambda \langle \vec{s}, \vec{s} \rangle = 0$

Aufgabe 8.2

In der folgenden Aufgabe möchten wir den Ausdruck, welchen Sie in der vorhergehenden Aufgabe erhalten haben, verallgemeinern. Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ definieren wir dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} \Pi_v : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\longmapsto \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v, \end{aligned}$$

wobei $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Betrachten Sie die Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, die im untenstehenden Koordinatensystem eingezeichnet sind.



(a) Betrachten Sie den Vektor $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und zeichnen Sie w ebenfalls in das Koordinatensystem ein. Drücken Sie w als eine Linearkombination von e_1 und e_2 aus. Erläutern Sie die geometrische Interpretation dieser Linearkombination mit Hilfe der Skizze.

(b) Berechnen Sie die Vektoren $\Pi_{e_1}(w)$ und $\Pi_{e_2}(w)$. Zeichnen Sie diese Vektoren ebenfalls in das Koordinatensystem ein. Was scheint die geometrische Interpretation dieser Vektoren zu sein? Begründen Sie Ihre Antwort. Drücken Sie w als Linearkombination von $\Pi_{e_1}(w)$ und $\Pi_{e_2}(w)$ aus.

(c) Vergleichen und kontrastieren Sie Ihre Resultate von den Teilaufgaben (a) und (b). Was fällt Ihnen auf? Sehen Sie eine Möglichkeit, die Skalare in der Linearkombination von Teilaufgabe (a) mit Hilfe von Skalarprodukten zu berechnen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8.3

In der folgenden Aufgabe möchten wir die Abbildung von Aufgabe 2 für den Vektorraum $\mathcal{P}_1$ untersuchen. Wir betrachten für $p \in \mathcal{P}_1$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \Pi_p : \mathcal{P}_1 &\longrightarrow \mathcal{P}_1 \\ q &\longmapsto \frac{\langle q, p\rangle}{\langle p, p\rangle} p, \end{aligned}$$

wobei $\langle \cdot , \cdot \rangle$ das folgende Skalarprodukt des Vektorraumes $\mathcal{P}_1$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longmapsto \langle q, p\rangle := \int_0^1 q(x)p(x)dx \end{aligned}$$

Betrachten Sie die Polynome $p_1(x) = 2,\ p_2(x) = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$, und $s(x) = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$.

(a) Drücken Sie s als Linearkombination von p_1 und p_2 aus.

(b) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle p_1, p_1\rangle$, $\langle p_2, p_2\rangle$ und $\langle p_1, p_2\rangle$.

(c) Berechnen Sie nun die Vektoren $\Pi_{p_1}(s)$ und $\Pi_{p_2}(s)$. Drücken Sie s als Linearkombination von $\Pi_{p_1}(s)$ und $\Pi_{p_2}(s)$ aus.

(d) Vergleichen und kontrastieren Sie Ihre Resultate von den Teilaufgaben (a) und (b). Was fällt Ihnen auf? Sehen Sie eine Möglichkeit, die Skalare in der Linearkombination von Teilaufgabe (a) mit Hilfe von Skalarprodukten zu berechnen? Begründen Sie Ihre Antwort.