Bonusaufgabe 9

Aufgabe 9.1

Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Nehmen Sie an, dass ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ existiert, welcher das lineare Gleichungssystem $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ löst. Kann man daraus folgern, dass λx ebenfalls eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist, also dass $A(\lambda x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Nehmen Sie an, dass Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ und $u \in \mathbb{R}^3$ existieren, welche die linearen Gleichungssysteme $Aw = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ respektive $Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lösen. Kann man daraus folgern, dass $w + u$ ebenfalls eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist, also dass $A(w + u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie die Lösungsmenge $K_1 = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Welche Eigenschaften hat diese Menge? Beantworten Sie ausserdem die folgenden Fragen zur Menge K_1.

   i. Liegt der Vektor $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in K_1? Begründen Sie.

   ii. Liegt der Vektor $t = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$ in K_1? Begründen Sie.

   iii. Können Sie einen anderen Vektor finden, welcher in K_1 liegt? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel und begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Betrachten Sie nun die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Betrachten Sie zusätzlich die Menge $K_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Vergleichen und kontrastieren Sie die Mengen K_1 und K_2. Was beobachten Sie? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9.2

Betrachten Sie wiederum die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Nehmen Sie an, dass ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ existiert, welcher das lineare Gleichungssystem $Av = w$ löst. Kann man daraus folgern, dass ein Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ existiert, welcher für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem $Au = \lambda w$ löst? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Nehmen Sie an, dass Vektoren $v_1 \in \mathbb{R}^3$ und $v_2 \in \mathbb{R}^3$ existieren, welche die linearen Gleichungssysteme $Av_1 = w_1$ respektive $Av_2 = w_2$ lösen. Kann man daraus folgern, dass ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ existiert, welcher das lineare Gleichungssystem $Ax = w_1 + w_2$ löst? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie die Menge $I_1 = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\, v \in \mathbb{R}^3 : Av = w\}$. Welche Eigenschaften hat diese Menge? Beantworten Sie ausserdem die folgenden Fragen zur Menge I_1.

   i. Liegt der Vektor $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in I_1? Begründen Sie.

   ii. Liegt der Vektor $t = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ in I_1? Begründen Sie.

   iii. Können Sie einen anderen Vektor finden, welcher in I_1 liegt? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel und begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Bilden die Vektoren Av_1, Av_2 und Av_3 auch eine Basis des $\mathbb{R}^2$? Bilden die Vektoren Av_1, Av_2 und Av_3 eine Basis von I_1? Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Betrachten Sie wiederum die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Betrachten Sie zusätzlich die Menge $I_2 = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\, x \in \mathbb{R}^3 : F(x) = w\}$. Vergleichen und kontrastieren Sie die Mengen I_1 und I_2. Was beobachten Sie? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9.3

Betrachten Sie die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie die Mengen

$$K = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Bv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad I = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, v \in \mathbb{R}^2 : Bv = w\}.$$

(a) Liegt der Vektor $s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in K? Begründen Sie.

(b) Liegt der Vektor $s = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ in I? Begründen Sie.

(c) Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Bilden die Vektoren Bv_1 und Bv_2 auch eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Bilden die Vektoren Bv_1 und Bv_2 eine Basis von I? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9.4

(a) Betrachten Sie eine Matrix $G \in \mathbb{R}^{2x3}$. Ist es möglich, dass die Menge $K = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; Gv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als einziges Element enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Betrachten Sie eine Matrix $G \in \mathbb{R}^{2x3}$. Ist es möglich, dass die Menge $I = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, v \in \mathbb{R}^3 : \; Gv = w \right\}$ alle Vektoren des $\mathbb{R}^2$ enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie eine Matrix $H \in \mathbb{R}^{3x2}$. Ist es möglich, dass die Menge $K = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Hv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als einziges Element enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Betrachten Sie eine Matrix $H \in \mathbb{R}^{3x2}$. Ist es möglich, dass die Menge $I = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\, v \in \mathbb{R}^2 : \; Hv = w \right\}$ alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$ enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.