Lineare Algebra II

Bonusaufgabe 10

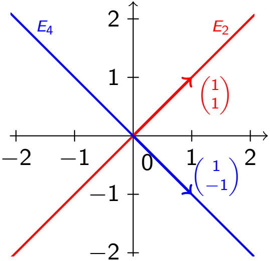
10.1 Betrachten Sie die Matrizen $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und dazugehörigen Eigenräume von A_1 und A_2. Zeichnen Sie die Eigenräume von A_1 und A_2 in einem 2-dimensionalen Koordinatensystem.

Antwort. EW von A_1: $\det(A_1 - \lambda\mathbb{I}) = (3-\lambda)^2 - 1 \overset{!}{=} 0 \implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$.

Eigenraum $E_2 = \operatorname{kern}(A_1 - 2\mathbb{I}) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Eigenraum $E_4 = \operatorname{kern}(A_1 - 4\mathbb{I}) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

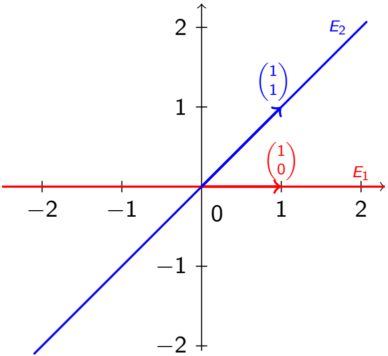


Dasselbe für A_2:

A_2 ist eine Dreiecksmatrix, die EW stehen also direkt auf der Diagonalen: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

Eigenraum $E_1 = \text{kern}(A_2 - 1\mathbb{I}) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Eigenraum $E_2 = \text{kern}(A_2 - 2\mathbb{I}) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.



1(b) Die Matrix A_1 kann wie folgt diagonalisiert werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=T_1^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{=A_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:T_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{=:D_1}$$

Vergleichen Sie die Transformationsmatrix T_1 und die Diagonalmatrix D_1 mit Ihren Berechnungen in Teilaufgabe (a). Was fällt Ihnen auf?

Antwort. Die Idee ist folgende: Die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto A_1 x$ hat in der Standardbasis $\mathcal{B}$ die Darstellungsmatrix A_1. Die Darstellungsmatrix von F in einer Basis $\mathcal{E}$ aus Eigenvektoren muss diagonal sein, denn EV werden einfach nur mit dem EW gestreckt. D.h. wir wählen für T_1 die Übergangsmatix von $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{B}$:

$\boxed{\text{Die Spalten von } T_1 \text{ sind also die EV von } A_1 \text{ in der Basis } \mathcal{B}!}$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, T_1^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann wird die Darstellungsmatrix von F bezüglich $\mathcal{E}$:

$$T^{-1} A_1 T = \operatorname{diag}(2, 4).$$

1(c) Ist es möglich, die Matrix A_1 auch mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer Skizze aus Teilaufgabe (a). Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

Antwort. Die EV von A_1 sind orthogonal, insbesondere ist $\tilde{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Transformationsmatrix.

Recall: Dann gilt $\tilde{T}^{-1} = \tilde{T}^{\top}$.

1(d) Die Matrix A_2 kann wie folgt diagonalisiert werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=T_2^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=A_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:T_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:D_2}$$

Vergleichen Sie die Transformationsmatrix T_2 und die Diagonalmatrix D_2 mit Ihren Berechnungen in Teilaufgabe (a). Was fällt Ihnen auf?

Antwort. Genau wie oben bei 1(b):

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies T_2^{-1} A_2 T_2 = \mathrm{diag}(1, 2).$$

1(e) Ist es möglich, die Matrix A_2 auch mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer Skizze aus Teilaufgabe (a).

Antwort. Die EV von A_2 sind nicht orthogonal, insbesondere sind die Spalten der Transformationsmatrix T_2 nicht orthogonal und somit gibt es in diesem Fall keine orthogonale Transformationsmatrix.

10.2 Betrachten Sie die Matrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume der Matrizen B_1 und B_2.

Antwort. EW von B_1:

$$\det(B_1 - \lambda \mathbb{I}) = 11\lambda^2 - \lambda^3 \stackrel{!}{=} 0 \implies \lambda_1 = 11, \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Eigenraum $E_{11} = \mathrm{kern}(B_1 - 11\mathbb{I}) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

Eigenraum $E_0 = \mathrm{kern}(B_1) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

EW von B_2:

$\det(B_2-\lambda\mathbb{I})=2+\lambda-2\lambda^2-\lambda^3 \stackrel{!}{=} 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2.$

Eigenraum $E_1 = \text{kern}(B_2 - 1\mathbb{I}) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$,

Eigenraum $E_{-1} = \text{kern}(B_2 - (-1)\mathbb{I}) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Eigenraum $E_{-2} = \text{kern}(B_2 - (-2)\mathbb{I}) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

2(b) Diagonalisieren Sie die Matrix B_1 mithilfe Ihrer Erkenntnisse aus den Teilaufgaben (b) und (d) aus der vorhergehenden Aufgabe. Denn: Die Diagonalisierung von 2×2-Matrizen und 3×3-Matrizen verläuft analog.

Wie zuvor wählen wir T als Übergangsmatrix von der Eigenbasis zur Standardbasis: Also

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 10 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Dann folgt $T^{-1} B_1 T = \operatorname{diag}(11, 0, 0)$.

2(c) Ist es möglich, die Matrix B_1 auch mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

Antwort. Ja! Die Vektoren aus E_{11} und E_0 stehen bereits senkrecht zueinander. Wir können also einfach einen Einheitsvektor aus E_{11} und mit Gram-Schmidt zwei orthonormale EV in E_0 wählen und sie als Spalten von T verwenden:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{22}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}$$

2(d) Diagonalisieren Sie die Matrix B_2.

Antwort. Wie zuvor wählen wir T als Übergangsmatrix von der Eigenbasis zur Standardbasis: Also

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann folgt $T^{-1}B_2T = \operatorname{diag}(1, -1, -2)$.

2(e) Ist es möglich, die Matrix B_2 auch mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren?

Antwort. Nein, die EV zu den EW -1 und -2 von B_2 sind nicht orthogonal.

10.3 Vergleichen und kontrastieren Sie die Matrizen A_1 und B_1. Welche Eigenschaft haben diese beiden Matrizen gemeinsam?

Antwort. Die Matrizen A_1 und B_1 sind symmetrisch. Ihre Eigenräume sind orthogonal. B_1 hat zwar einen zweidimensionalen Eigenraum, aber dort kann man mit Gram-Schmidt zwei orthonormale EV bestimmen. Auf diese Weise ergibt sich eine orthonormale Eigenbasis. Nimmt man diese Vektoren als Spalten der Transformatonsmatrix T, so ist T orthogonal.