

## Posttest FS21 Lineare Algebra II FS21 für MAVT und MATL

Aufgabe 1.1:

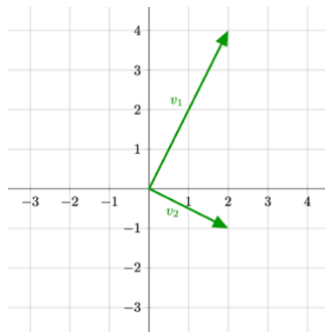
Betrachten Sie die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	Wahr	Falsch	Confidence
(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(b) 0 ist ein Eigenwert von A.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(d) $-1$ ist ein Eigenwert von A.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Aufgabe 1.2:

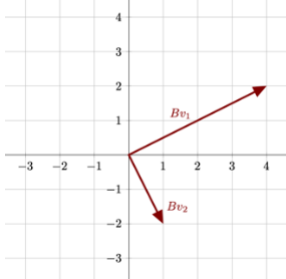
Die untenstehende Grafik zeigt Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$  einer Matrix  $B$ .



Entscheiden Sie für jede der vier Grafiken unten, ob sie eine mögliche Darstellung von  $Bv_1$  und  $Bv_2$  beinhalten (Wahr) oder nicht (Falsch).

	Wahr	Falsch	Confidence
<p>(a)</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<p>(b)</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<p>(c)</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

(d)



Aufgabe 2.1:

Betrachten Sie das folgende Skalarprodukt im Vektorraum  $\mathcal{P}_2$ :

$$\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

Betrachten Sie zudem die Polynome  $u(x) = 6x^2 - 1$ ,  $v(x) = x - 1$  und  $w(x) = -5x^2$ , sowie zwei Polynome  $s(x)$  und  $t(x)$  mit  $\langle s, t \rangle = 3$ .

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	Wahr	Falsch	Confidence
(a) $u$ und $v$ sind orthogonal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(b) $w$ besitzt Länge 5.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(c) Es gilt $\langle t, s \rangle = -3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(d) Es gilt $\langle -2s, 3t \rangle = -18$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Aufgabe 2.2:

Betrachten Sie den Vektorraum  $\mathbb{R}^2$ .

Entscheiden Sie für die folgenden Abbildungen, ob sie ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  definieren (Wahr) oder nicht (Falsch).

Hinweis: Rufen Sie sich die Axiome eines Skalarprodukts in Erinnerung.

	Wahr	Falsch	Confidence
(a) $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(b) $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(c) $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(d) $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Aufgabe 3.1:

Betrachten Sie die orthogonale Projektion  $\Pi_v$  auf den Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$  mit

$$\Pi_v \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

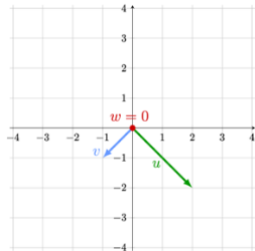
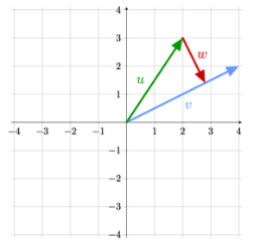
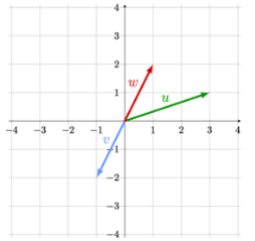
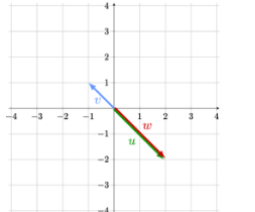
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	Wahr	Falsch	Confidence
(a) Es gilt $\Pi_v \left( \Pi_v \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = 0$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(b) Es gilt $\Pi_v \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(c) Es gilt $\Pi_v(v) = v$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(d) Es gilt $\Pi_{2v} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Aufgabe 3.2:

Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils drei Vektoren  $u, v$  und  $w$  in  $\mathbb{R}^2$ . Weiter beschreibt  $\Pi_v$  die orthogonale Projektion auf  $v$ .

Entscheiden Sie für jede der folgenden Abbildungen, ob  $w = \Pi_v(u)$  gilt (Wahr) oder nicht (Falsch).

	Wahr	Falsch	Confidence
<p>(a)</p> 	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<p>(b)</p> 	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<p>(c)</p> 	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<p>(d)</p> 	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Aufgabe 4.1:

Betrachten Sie die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$  sowie die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	Wahr	Falsch	Confidence
(a) $v_1 \in \text{Ker}(A)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(b) $v_1 \in \text{Im}(A)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(c) $v_2 \in \text{Ker}(A)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(d) $v_2 \in \text{Im}(A)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Aufgabe 4.2:

Betrachten Sie beliebige Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  und  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ .

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	Wahr	Falsch	Confidence
(a) Es gilt $\dim(\text{Im}(A)) < 3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(b) Es gilt $\dim(\text{Ker}(A)) > 0$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(c) Es gilt $\dim(\text{Im}(C)) < 3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(d) Es gilt $\dim(\text{Ker}(C)) > 0$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>



Aufgabe 5.1:

Betrachten Sie die Matrix  $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ . Wir diagonalisieren  $A$  mit Hilfe einer Transformationsmatrix  $T$  wie folgt:  $A = TDT^{-1}$ .

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	Wahr	Falsch	Confidence
(a) $D$ ist eine der folgenden Matrizen: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ oder $D = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(b) Es ist $A^{2021} = TD^{2021}T^{-1}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(c) Die Spaltenvektoren von $T$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(d) Die Spaltenvektoren von $T$ sind orthogonal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Aufgabe 5.2:

Betrachten Sie die Matrix  $C = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 4 & 3 & -3 \\ -9 & 3 & 2 & -8 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 1 & 3 & 7 \\ -3 & 6 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ .

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	Wahr	Falsch	Confidence
(a) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von $C$ sind orthogonal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(b) $C$ ist diagonalisierbar mithilfe einer orthogonalen Transformationsmatrix.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(c) Es existiert eine Eigenbasis zu $C$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
(d) Alle Eigenwerte von $C$ sind reell.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>