Lösungen Serie 4

---

1. Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ ist die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

√ (a) richtig

(b) falsch

Die Orthogonalprojektion von $v = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ auf $w = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist gegeben durch

$$\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w = \frac{15}{45}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

2. $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

√ (a) richtig

(b) falsch

Sei

$$A = \begin{pmatrix}a^{(1)} & \cdots & a^{(n)}\end{pmatrix}$$

eine Matrix, wobei $a^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ den j-te Spaltenvektor bezeichnet. Dann ist

$$A^\top A = \begin{pmatrix}a^{(1)\top}\\ \vdots \\ a^{(n\top)}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a^{(1)} & \cdots & a^{(n)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\langle a^{(1)}, a^{(1)}\rangle & \cdots & \langle a^{(1)}, a^{(n)}\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle a^{(n)}, a^{(1)}\rangle & \cdots & \langle a^{(n)}, a^{(n)}\rangle\end{pmatrix}.$$

Hier ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$. Die Matrix A ist genau dann orthogonal, wenn $A^\top A = I$ ist. Aus der Berechnung oben folgt, dass dies zu der Aussage in der Aufgabenstellung äquivalent ist.

3. Falls sich die Graphen zweier Funktionen f und g senkrecht schneiden, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

(a) richtig

√ (b) falsch

Die Aussage stimmt zum Beispiel für die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = -x$ nicht. Deren Graphen schneiden sich senkrecht im Ursprung, aber es gilt

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b (-x^2)\,dx = \frac{a^3}{3} - \frac{b^3}{3} < 0,$$

also sind f und g nicht orthogonal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4. Ist f eine ungerade Funktion und g eine gerade Fuktion, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$.

√ (a) richtig

(b) falsch

Eine ungerade Funktion f erfüllt die Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$ und eine gerade Funktion g die Eigenschaft $g(-x) = g(x)$. Somit liefert die Substitution $y = -x$ die folgende Beziehung für das Skalarprodukt $\langle f, g\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx = \int_1^{-1} f(-y)g(-y)\,(-dy) = \int_{-1}^1 f(-y)g(-y)\,dy \\ &= \int_{-1}^1 (-f(y))g(y)\,dy = -\int_{-1}^1 f(y)g(y)\,dy = -\langle f, g\rangle.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\langle f, g\rangle = 0$, die ungerade Funktion f und die gerade Funktion g sind also orthogonal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

5. In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.

(a) richtig

√ (b) falsch

Für zwei Einheitsvektoren v und w besagt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (Satz 4.5 im Buch von Nipp/Stoffer)

$$\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle = 1 \cdot 1 = 1.$$

Daraus folgt $|\langle v, w\rangle| \leq 1$, das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren kann also nicht beliebig gross sein.

6. In jedem Vektorraum mit Skalarprodukt können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren finden.

(a) richtig

$\surd$ (b) falsch

Man beachte, dass paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem Vektorraum mit Skalarprodukt automatisch linear unabhängig sind (Satz 4.6 im Buch von Nipp/Stoffer). Somit kann es in einem Vektorraum der Dimension n höchstens n paarweise orthogonale Einheitsvektoren geben.

7.

a) Gegeben seien die drei Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$. Benützen Sie das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich der in a) berechneten orthonormalen Basis $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$, d.h.

$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}.$$

Lösung:

a) Es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Es induziert die euklidische Norm $\| \cdot \|_2$ auf $\mathbb{R}^3$.

<u>Berechnung von $b^{(1)}$:</u> $b^{(1)} = \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Berechnung von $b^{(2)}$:</u>

$$\langle a^{(2)}, b^{(1)} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow c^{(2)} = a^{(2)} - \langle a^{(2)}, b^{(1)} \rangle \, b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b^{(2)} = \frac{c^{(2)}}{\|c^{(2)}\|_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Berechnung von $b^{(3)}$:

$$\langle a^{(3)},\, b^{(1)}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle a^{(3)},\, b^{(2)}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c^{(3)} &= a^{(3)} - \langle a^{(3)},\, b^{(1)}\rangle\, b^{(1)} - \langle a^{(3)},\, b^{(2)}\rangle\, b^{(2)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow b^{(3)} &= \frac{c^{(3)}}{\|c^{(3)}\|_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Man kann natürlich die Matrix $B = (b^{(1)},\, b^{(2)},\, b^{(3)})$ definieren und $Bx = v$ nach x mit Gauss lösen. Weil $b^{(1)},\, b^{(2)},\, b^{(3)}$ eine orthonormale Basis bildet, wissen wir aber aus der Vorlesung, dass sich v als

$$v = \langle v, b^{(1)}\rangle b^{(1)} + \langle v, b^{(2)}\rangle b^{(2)} + \langle v, b^{(3)}\rangle b^{(3)}$$

schreiben lässt. Es gilt also für die Koordinaten x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} x_1 &= \langle v, b^{(1)}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}, \\ x_2 &= \langle v, b^{(2)}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{5}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{14}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}, \\ x_3 &= \langle v, b^{(3)}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{7}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Das ist genau das Gleiche wie das Lösen von $Bx = v$ durch $x = B^\top v$ (die Spalten von B sind orthonormiert, also ist B orthogonal und es gilt $B^{-1} = B^\top$).

Die Beziehung $x_i = \langle v, b^{(i)}\rangle$ für $i = 1, 2, 3$ lässt sich auch sehr leicht direkt aus dem Ansatz herleiten:

$$\begin{aligned} \langle v, b^{(i)}\rangle &= \langle x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}, b^{(i)}\rangle \\ &= x_1 \langle b^{(1)}, b^{(i)}\rangle + x_2 \langle b^{(2)}, b^{(i)}\rangle + x_3 \langle b^{(3)}, b^{(i)}\rangle \\ &= x_i, \end{aligned}$$

da $(b^{(1)},\, b^{(2)},\, b^{(3)})$ eine orthonormale Basis ist.

8. Gegeben seien die drei Vektoren $p^{(1)} = x^2$, $p^{(2)} = x$, $p^{(3)} = 1$ in $\mathcal{P}_2$. Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$ eine orthonormale Basis $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$ (respektieren Sie die Reihenfolge!). Benützen Sie als Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx, \text{ für } f, g \in \mathcal{P}_2.$$

Lösung: Berechnung von $q^{(1)}$:

$$\|p^{(1)}\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2x^2\,dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^4\,dx} = \sqrt{\frac{1}{5}x^5|_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{5}},$$

also $q^{(1)} = \frac{p^{(1)}}{\|p^{(1)}\|} = \sqrt{\frac{5}{2}}x^2$.

Berechnung von $q^{(2)}$:

$$\begin{aligned} c^{(2)} &= p^{(2)} - \langle p^{(2)}, q^{(1)}\rangle\, q^{(1)} = x - \underbrace{\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{5}{2}}u^3\,du}_{=0}\,\sqrt{\frac{5}{2}}x^2 = x \\ \Rightarrow q^{(2)} &= \frac{c^{(2)}}{\|c^{(2)}\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \text{ denn } \|c^{(2)}\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{3}x^3|_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Berechnung von $q^{(3)}$:

$$\begin{aligned} c^{(3)} &= p^{(3)} - \langle p^{(3)}, q^{(1)}\rangle\, q^{(1)} - \langle p^{(3)}, q^{(2)}\rangle\, q^{(2)} \\ &= 1 - \underbrace{\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{5}{2}}u^2\,du}_{=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}}\,\sqrt{\frac{5}{2}}x^2 - \underbrace{\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}u\,du}_{=0}\,\sqrt{\frac{3}{2}}x = 1 - \frac{5}{3}x^2 \\ \Rightarrow q^{(3)} &= \frac{c^{(3)}}{\|c^{(3)}\|} = -\frac{5}{\sqrt{8}}x^2 + \frac{3}{\sqrt{8}}, \text{ denn } \|c^{(3)}\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{5}{3}x^2\right)^2 dx} \\ &= \sqrt{\left(x - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{9}x^5\right)\Big|_{x=-1}^{1}} = \sqrt{\frac{8}{9}}. \end{aligned}$$

In dieser Reihenfolge erhält man also NICHT Vielfache von den Legendre-Polynomen (siehe S.97 im Buch von Nipp/Stoffer für die Anwendung des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren auf $1, x, x^2, x^3$).

9.

a) Gegeben seien die Funktionen $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$ und $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0, m \geq 1$ und $\alpha_n, \beta_m > 0$ wie in Aufgabe 8 der Serie 3, im Vektorraum $C^0([0, 2\pi])$. Man berechne für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Orthogonalprojektion der Funktion

$$\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \pi$$

auf den von $\{f_0, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k\}$ aufgespannten Unterraum, versehen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$. Die Aufgabe darf mit MATLAB gelöst werden.

b) Man stelle mit Hilfe von MATLAB die Funktion ϕ, sowie die gefundenen Projektionen für einige Werte von k als Graphen im selben Koordinatensystem dar.

Bemerkung: Die gefundenen Projektionen heissen Fourier-Polynome der Funktion ϕ. Für $k \to \infty$ erhält man die sogenannte Fourier-Reihe von ϕ.

Lösung:

a) Wir bezeichnen mit p_k die Orthogonalprojektion von ϕ auf den von $\{f_0, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k\}$ aufgespannten Unterraum von $C^0([0, 2\pi])$. Nach Aufgabe 8 der Serie 3 sind $\{f_0, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k\}$ paarweise orthogonale Einheitsvektoren von $C^0([0, 2\pi])$. Daher gilt nach der Formel aus der Vorlesung für die Orthogonalprojektion

$$p_k = \sum_{n=0}^{k} \langle\phi, f_n\rangle\, f_n + \sum_{m=1}^{k} \langle\phi, g_m\rangle\, g_m.$$

Wir müssen also die Skalarprodukte $\langle\phi, f_n\rangle$ für $n = 0, \ldots, k$ und $\langle\phi, g_m\rangle$ für $m = 1, \ldots, k$ ausrechnen. Für $n = 0$ bekommen wir

$$\langle\phi, f_0\rangle = \int_0^{2\pi} (x - \pi) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{x^2}{2} - \pi x\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{2\pi^2 - 2\pi^2}{\sqrt{2\pi}} = 0.$$

Für $n = 1, \ldots, k$ und $m = 1, \ldots, k$ benutzen wir partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\langle\phi, f_n\rangle &= \int_0^{2\pi} (x - \pi) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx\,dx \\
&= (x - \pi) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}\,n} \sin nx\Bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}\,n} \sin nx\,dx \\
&= 0 - 0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}\,n^2} \cos nx\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,n^2}(1 - 1) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\phi, g_m\rangle &= \int_0^{2\pi} (x - \pi) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx\,dx \\
&= (x - \pi) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}\,m} \cos mx\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}\,m} \cos mx\right) dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}\,m} (\pi - (-\pi)) + \frac{1}{\sqrt{\pi}\,m^2} \sin mx\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= -\frac{2\sqrt{\pi}}{m} + 0 - 0 = -\frac{2\sqrt{\pi}}{m}.
\end{aligned}$$

Somit ist die Orthogonalprojektion nach der obigen Formel durch

$$p_k(x) = \sum_{m=1}^{k} -\frac{2\sqrt{\pi}}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx = -\sum_{m=1}^{k} \frac{2}{m} \sin mx$$

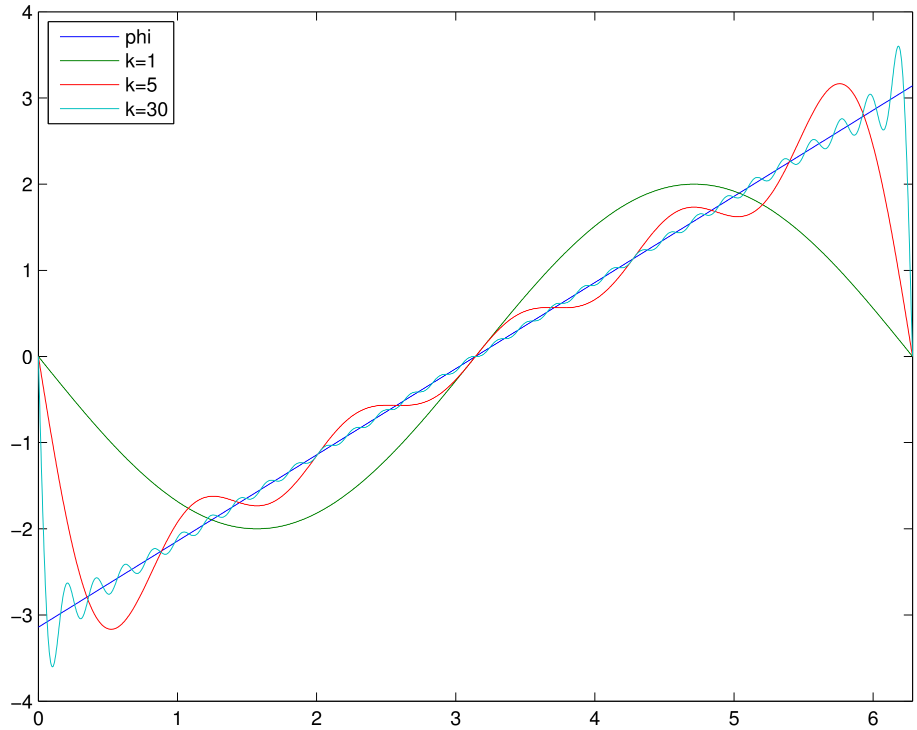
gegeben.

b) Der folgende Code löst die gesamte Aufgabe 9 mit MATLAB. Siehe die MATLAB Dokumentation für Erklärungen u.a. zu den Befehlen `quad` und `@`

```
% Bestimmung der Koeffizienten a(n)=<phi,f_n>
F = @(x)(x-pi)./sqrt(2*pi);
a0 = quad(F,0,2*pi);
a = [];
for n = 1:30
    F = @(x)(x-pi)./sqrt(pi).*cos(n*x);
    a = [a, quad(F,0,2*pi)];
end
b = [];
% Bestimmung der Koeffizienten b(m)=<phi,g_m>
for m = 1:30
    F = @(x)(x-pi)./sqrt(pi).*sin(m*x);
    b = [b, quad(F,0,2*pi)];
end

% Plotten von phi, p_1, p_5 und p_30
x=0:pi/1000:2*pi;
phi = x-pi;
p1 = a0/sqrt(2*pi)+a(1)/sqrt(pi)*cos(x)+b(1)/sqrt(pi)*sin(x);
p5 = a0/sqrt(2*pi);
for n=1:5
    p5 = p5 + a(n)/sqrt(pi)*cos(n*x) + b(n)/sqrt(pi)*sin(n*x);
end
p30 = a0/sqrt(2*pi);
for n = 1:30
    p30 = p30 + a(n)/sqrt(pi)*cos(n*x) + b(n)/sqrt(pi)*sin(n*x);
end
plot(x,phi,x,p1,x,p5,x,p30)
axis([0,2*pi,-4,4])
legend('phi','k=1','k=5','k=30','Location','NorthWest')
% Export in ps-File: print -dpsc a4_4ab.ps
```

Darstellung von ϕ und der gefundenen Projektionen p_k für $k = 1$, $k = 5$ und $k = 30$ als Graphen:



phi
k=1
k=5
k=30
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
0
1
2
3
4
5
6