Lösungen Serie 7

1. Sei $\mathcal{P}_3$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3. Die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3,\ p(x) \mapsto p(x) - p'(x)$ hat die Eigenwerte ...

(a) 0 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.

(b) 0 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 1.

(c) 1 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.

$\surd$ (d) 1 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 1.

Um die Eigenwerte der gegebenen linearen Abbildung $\mathcal{F}$ berechnen zu können, bestimmen wir zuerst ihre Darstellungsmatrix A bezüglich der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1) &= 1, \\ \mathcal{F}(x) &= x - 1, \\ \mathcal{F}(x^2) &= x^2 - 2x, \\ \mathcal{F}(x^3) &= x^3 - 3x^2. \end{aligned}$$

In den Spalten von A stehen die Koordinaten von $\mathcal{F}(1)$, $\mathcal{F}(x)$, $\mathcal{F}(x^2)$, $\mathcal{F}(x^3)$ bezüglich der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$. Somit gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^4,$$

weil die Determinante einer Dreiecksmatrix durch das Produkt der Diagonalelemente gegeben ist. Darum hat $\mathcal{F}$ nur den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 4.

Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 ist gleich der Dimension des Kerns von $A - I_4$, also gleich der Anzahl der freien Parameter bei der Lösung des Gleichungssystems $(A - I_4)x = 0$ mit

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die geometrische Vielfachheit ist daher gleich 1, weil die Lösung dieses Gleichungssystems durch $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ mit x_1 frei gegeben ist.

Bemerkung: Gemäss dieser Rechnung ist der Eigenraum von $\mathcal{F}$ zum Eigenwert 1 durch $\operatorname{span}\{1\}$ gegeben, weil das konstante Polynom $p(x) = 1$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der gewählten Basis hat.

2.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie von Hand eine orthogonale Eigenbasis zu A.

c) Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit MATLAB.

Lösung:

a) Eigenwerte: Wir entwickeln die Determinante nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3-\lambda & -1 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -2 \text{ (durch Ausprobieren).}
\end{aligned}$$

Durch Polynomdivision erhält man

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = (\lambda+2)(-\lambda^2 + 8\lambda - 16) = -(\lambda+2)(\lambda-4)^2$$

und somit

$$\lambda_{2,3} = 4 \text{ (algebraische Vielfachheit 2).}$$

Eigenvektoren: $\underline{\lambda_1 = -2}$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_3 \text{ frei}, x_2 = x_3,\; x_1 = -x_2 - x_3 = -2x_3 \;\Rightarrow\; \text{z.B. } v^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\underline{\lambda_2 = \lambda_3 = 4}$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_3 \text{ frei}, x_2 \text{ frei}, x_1 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \;\Rightarrow\; \text{z.B. } v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\; v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Da A reell und symmetrisch ist, stehen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal aufeinander (siehe Satz aus der Vorlesung). Also ist $v^{(1)}$ orthogonal zu allen Eigenvektoren zum Eigenwert 4.

Daher genügt es zwei orthogonale Eigenvektoren zum Eigenwert 4 zu finden. Das geht zum Beispiel, indem wir das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf $v^{(2)}$ und $v^{(3)}$ anwenden (wir verzichten auf die Normierung von $c^{(3)}$, weil nur eine orthogonale Eigenbasis gesucht ist):

$$e^{(2)} = \frac{v^{(2)}}{\|v^{(2)}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c^{(3)} = v^{(3)} - \underbrace{(v^{(3)}, e^{(2)})}_{=\sqrt{3}} e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist beispielsweise $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine orthogonale Eigenbasis zu A.

c) Kontrolle der Ergebnisse mit MATLAB:

```
A=[0 2 2;
2 3 -1;
2 -1 3];
v1 = [-2; 1; 1];
v2 = [1; 1; 1];
v3 = [0; 1; -1];

% Kontrolle, ob v1 Eigenvektor zum Eigenwert -2 ist (ok wenn w1=u1)
w1 = A*v1
u1 = -2*v1

% Kontrolle, ob v2 Eigenvektor zum Eigenwert 4 ist (ok wenn w2=u2)
w2 = A*v2
u2 = 4*v2

% Kontrolle, ob v3 Eigenvektor zum Eigenwert 4 ist (ok wenn w3=u3)
w3 = A*v3
u3 = 4*v3

% Kontrolle, ob v1, v2, v3 orthogonal aufeinander stehen
% Skalarprodukt von v1 und v2
v1'*v2
% Skalarprodukt von v1 und v3
v1'*v3
% Skalarprodukt von v2 und v3
v2'*v3
```

3.

a) Diagonalisieren Sie – falls möglich – die Matrizen

(i) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, (ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, (iii) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Kann man in den Fällen, in denen die Matrizen diagonalisierbar sind, die entsprechenden Transformationsmatrizen T orthogonal wählen? Wenn ja, geben Sie so ein T an.

Lösung:

a) (i)

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)+4 = 1-2\lambda+\lambda^2 \\ &= (\lambda-1)^2 \overset{!}{=} 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Eigenwert $\lambda_1 = 1$ (die algebraische Vielfachheit ist 2).
<u>Eigenraum zu λ_1</u>: $(A-\lambda_1 I_2)x = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 \text{ frei, } x_1 = 2x_2 \Rightarrow \text{z.B. } v^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ geom. Vielfachheit von λ_1 ist $1 \neq 2 =$ alg. Vielfachheit.
$\Rightarrow$ <u>A ist nicht diagonalisierbar</u>.

(ii) B ist symmetrisch und reell, also auch diagonalisierbar.

$$\begin{aligned}\det(B-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1-\lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(1-\lambda)(5-\lambda)-1] + 2[-2(1-\lambda)] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+4) - 4(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda) = -\lambda(\lambda-6)(\lambda-1) \overset{!}{=} 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 1$.
Zu drei verschiedenen Eigenwerten gibt es drei linear unabhängige Eigenvektoren, also existiert eine Eigenbasis (auch daraus folgt, dass B diagonalisierbar ist):
<u>Eigenvektor zu λ_1</u>: $(B-\lambda_1 I_3)x = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_3$ frei, $x_2 = x_3$, $x_1 = -2x_3$

$\Rightarrow$ z.B. $v^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eigenvektor zu λ_2: $(B-\lambda_2 I_3)x=0$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_3$ frei, $x_2 = -\frac{1}{5}x_3$, $x_1 = \frac{2}{5}x_3$

$\Rightarrow$ z.B. $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Eigenvektor zu λ_3: $(B-\lambda_3 I_3)x=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_3 = 0$, x_2 frei, $x_1 = \frac{1}{2}x_2$

$\Rightarrow$ z.B. $v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T = \left(v^{(1)}\, v^{(2)}\, v^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{-1}BT.$

(iii)

$$\begin{aligned} \det(C-\lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1) \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$.

Die Eigenwerte sind verschieden, also existiert eine Eigenbasis:

Eigenvektor zu λ_1: $(C-\lambda_1 I_2)x=0$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_2$ frei, $x_1 = -\frac{2}{3}x_2 \Rightarrow$ z.B. $v^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Eigenvektor zu λ_2: $(C-\lambda_2 I_2)x=0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_2$ frei, $x_1 = x_2 \Rightarrow$ z.B. $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$T = \left(v^{(1)}\, v^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D_C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T^{-1}CT.$

b) (ii): Weil B symmetrisch ist, gibt es eine orthogonale Transformationsmatrix T. Die Eigenvektoren stehen bereits senkrecht aufeinander, also müssen wir die Spalten von T nur noch normieren:

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii): Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 stehen nicht senkrecht aufeinander. Daher können wir die Transformationsmatrix T nicht orthogonal wählen, da die Spalten von T stets eine Eigenbasis von C bilden. Damit T orthogonal ist, müssten die Spalten orthonormal sein.

4. Angeregt durch die berühmte Kaninchenaufgabe von Leonardo von Pisa (1170–1250), genannt Fibonacci, stellen wir die folgende Aufgabe:
Annahme: Neugeborene Kaninchenpaare bringen nach dem ersten und dem zweiten Monat jeweils ein neues Kaninchenpaar zur Welt und stellen dann die weitere Fortpflanzung ein.

a) Man bestimme eine Rekursionsformel für die Anzahl F_n der im Monat n neugeborenen Kaninchenpaare. Man starte mit $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

b) Bestimmen Sie das allgemeine Glied F_n nach folgender Anleitung:

1. Setzen Sie $x^{(n)} = \binom{F_n}{F_{n+1}}$, $n = 0, 1, \ldots$. Die Zuordnung $x^{(n)} \longmapsto x^{(n+1)}$ ist eine lineare Abbildung. Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A.
2. Die Zuordnung $x^{(0)} \longmapsto x^{(n)}$ ist auch eine lineare Abbildung. Sie wird beschrieben durch die Abbildungsmatrix A^n. Berechnen Sie den Vektor $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$ und geben Sie F_n an.

c) Man bestimme den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$

Lösung:

a) Nach unserer Annahme bringen im Monat n die im Monat $n-1$ und Monat $n-2$ neugeborenen Kaninchenpaare je ein neues Kaninchenpaar zur Welt. Die Anzahl der neugeborenen Kaninchenpaare im Monat n ist also die Summe der Anzahl der neugeborenen Kaninchenpaare in den Monaten $n-1$ und $n-2$:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

wobei diese Rekursionsformel für $n \geq 2$ gilt und nach Annahme $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ gilt.

b) 1. Nach der obigen Rekusionsformel gilt für $n \geq 0$

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+1} + F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x^{(n)}. \end{aligned}$$

Die lineare Abbildung $x^{(n)} \mapsto x^{(n+1)}$ ist also durch die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

2. Da A reell symmetrisch ist, kann man eine orthogonale Matrix T finden, so dass $D = T^{-1}AT$ diagonal ist. Dann gilt $A = TDT^{-1}$ und somit

$$A^n = (TD\underbrace{T^{-1})(T}_{I_2}D\underbrace{T^{-1})}_{I_2}\cdot\cdot\underbrace{\cdot(T}_{I_2}DT^{-1}) = TD^nT^{-1}.$$

Für die Bestimmung von T bestimmen wir zuerst die Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 \overset{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Für die Bestimmung der Eigenräume bemerken wir, dass

$$\lambda_1 \, \lambda_2 = \frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \quad (\star)$$

und

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

gilt (das sieht man auch durch Koeffizientenvergleich bei $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda - 1$).

<u>Normierter Eigenvektor zu λ_1</u>: $(A - \lambda_1 I_2)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & \underbrace{1-\lambda_1}_{\lambda_2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_1 \lambda_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

ist ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert λ_1.

<u>Normierter Eigenvektor zu λ_2</u>: $(A - \lambda_2 I_2)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ 1 & \underbrace{1-\lambda_2}_{\lambda_1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\lambda_1 \lambda_2 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert λ_2.

Bemerkung: Da A reell und symmetrisch ist, lässt sich $v^{(2)}$ auch direkt ablesen, da $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ orthogonal sein müssen (wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Es gilt also

$$D = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit

$$T = (v^{(1)} \, v^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ \lambda_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da T orthogonal ist, gilt $T^{-1} = T^\top$ und damit

$$T^{-1} x^{(0)} = T^\top \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = T^\top \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$D^n T^{-1} x^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} \\ \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= A^n x^{(0)} = T D^n T^{-1} x^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ \lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} \\ \lambda_2^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+\lambda_1^2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_1 \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+2} + \lambda_2^n \end{pmatrix} \overset{(\star)}{=} \frac{1}{1+\lambda_1^2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n-1} \\ \lambda_1^{n+2} + \lambda_2^n \end{pmatrix} \\ \Rightarrow F_n &= \frac{\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n-1}}{1+\lambda_1^2} \overset{(\star)}{=} \frac{\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n-1}}{1 - \lambda_1/\lambda_2} = \frac{-\lambda_2(\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n-1})}{-\lambda_2(1 - \lambda_1/\lambda_2)} \\ &\overset{(\star)}{=} \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \end{aligned}$$

c) Für $n \geq 1$ gilt

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}} = \frac{\lambda_1^{n-1}\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^{n-1}}\right)}{\lambda_1^{n-1}\left(1 - \frac{\lambda_2^{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}\right)} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}}.$$

Beachte nun, dass

$$\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| \overset{(\star)}{=} |-\lambda_2^2| = |\lambda_2|^2 < 1$$

gilt, daher strebt $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}$ für $n \to \infty$ gegen Null. Somit haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Man nennt diesen Wert auch den goldenen Schnitt.