Serie 12

1. Welche Dimension hat der Lösungsraums des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1 + y_2' \\ y_2''' &= y_1' \end{aligned}$$

(a) 2

(b) 3

(c) 5

(d) 6

2. Für die Wronski-Determinante W zweier reeller Funktionen ϕ_1, ϕ_2 gelte $W(0) = 1$ und $W(1) = -1$. Jemand behauptet, (ϕ_1, ϕ_2) sei die Basis des Lösungsraums einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung. Kann diese Behauptung zutreffen?

(a) Ja.

(b) Nein.

3. Seien S_I und S_H die Lösungsräume einer linearen, (echt) inhomogenen und der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $S_H \cap S_I$ ist leer.

(b) $S_H \cap S_I = \{0\}$.

(c) $S_H \cap S_I$ ist ein Vektorraum.

4.

a) Man verwandle das lineare System zweiter Ordnung für die Funktionen $y(x)$ und $z(x)$

$$\begin{aligned} y'' &= xy + y' + e^x z \\ z'' &= y - x^2 y' + \sin(x) z' \end{aligned}$$

in ein lineares System 1. Ordnung.

b) Welche Dimension hat der Lösungsraum?

5. *Der angeregte harmonische Oszillator:*

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

beschreibt einen periodisch angeregten harmonischen Oszillator mit der Grundfrequenz $\omega \neq 1$ und $\omega \neq 0$.

a) Man bestimme eine Basis des Lösungsraums des homogenen Systems.
Hinweis: Siehe Folien zur Vorlesung vom 18. Mai.

b) Man bestimme eine partikuläre Lösung.
Hinweis: Ansatz $Y(t) = c \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.

c) Man bestimme die allgemeine Lösung des angeregten Systems.

6. *Der gedämpfte harmonische Oszillator:*

$$y'' = -\omega^2 y - y'$$

beschreibt einen durch Reibung gedämpften harmonischen Oszillator bei unterkritischer Dämpfung (d.h. $\omega > \frac{1}{2}$).

a) Man bestimme eine Basis des Lösungsraums.

b) Man berechne die Wronski-Determinante für die gewählte Basis.

c) Man gebe die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung 2. Ordnung an.