Lineare Algebra II

Bonusaufgabe: Lernkontrolle FS23

1.1 Betrachten Sie die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A. wahr

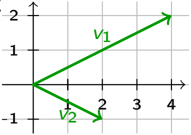
(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A. falsch

(c) 0 ist ein Eigenwert von A. wahr

(d) -1 ist ein Eigenwert von A. falsch

Antwort. Bei einer Dreiecksmatrix stehen die EW auf der Diagonalen.
Ob ein Vektor ein EV ist, sieht man durch Einsetzen in die Eigenwertgleichung $Ax = \lambda x$.

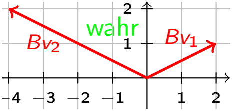
1.2



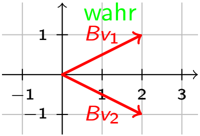
Die Graphik zeigt die EV v_1 und v_2 einer Matrix B.

Entscheiden Sie für jede der vier Grafiken unten, ob sie eine mögliche Darstellung von Bv_1 und Bv_2 ist (wahr) oder nicht (falsch).

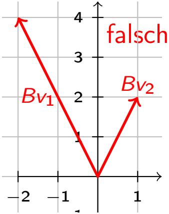
(a)



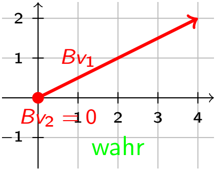
(b)



(c)



(d)



Antwort. EV werden unter der Abbildung $x \mapsto Bx$ gestreckt. Streckungsfaktor ist der EW.

2.1 Betrachten Sie das Skalarprodukt

$$\mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}, \quad (p, q) \mapsto \langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx,$$

die Polynome $u(x) = x^3 - 2x + 1$, $v(x) = 2x^2$, $w(x) = -11x^2$, sowie zwei Polynome $s(x), t(x)$ mit $\langle s, t\rangle = \frac{5}{3}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) w besitzt die Länge 11. falsch

(b) Es gilt $\langle -4s, 3t\rangle = -20$. wahr

(c) u und v sind orthogonal. wahr

(d) Es gilt $\langle t, s\rangle = -\frac{5}{3}$. falsch

Antwort. (a) $\|w\| = \sqrt{\langle w, w\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (-11x^2)^2 dx} = 11/\sqrt{5}$.

(d) $\langle -4s, 3t\rangle = (-4)\cdot 3\langle s, t\rangle = (-4)\cdot 3 \cdot \frac{5}{3} = -20$.

(c) $\int_0^1 (x^3 - 2x + 1)(2x^2)dx = 0$.

(c) $\langle s, t\rangle = \langle t, s\rangle = \frac{5}{3}$.

2.2 Entscheiden Sie für die folgenden Abbildungen, ob sie ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definieren (wahr) oder nicht (falsch).
Hinweis: Rufen Sie sich die Axiome eines Skalarprodukts in Erinnerung.

(a) $\langle \binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2} \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_2$. falsch

(b) $\langle \binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2} \rangle = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$. wahr

(c) $\langle \binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2} \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$. falsch

(d) $\langle \binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2} \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$. falsch

Antwort. (a) ist nicht symmetrisch.

(b) ist symmetrisch, linear in beiden Argumenten und positiv definit: $\langle \binom{x_1}{x_2}, \binom{x_1}{x_2} \rangle = (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2$ (oder mit Hurwitz).

(c) ist nicht positiv definit: $\langle \binom{1}{-1}, \binom{1}{-1} \rangle = -2$.

(d) ist nicht linear in den Argumenten.

3.1 Betrachten Sie die orthogonale Projektion Π_v auf den Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\Pi_v\binom{1}{3} = \binom{2}{1}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Es gilt $\Pi_{2v}\binom{1}{3} = \binom{4}{2}$. falsch
(b) Es gilt $\Pi_v(v) = v$. wahr

(c) Es gilt $\Pi_v(\Pi_v\binom{1}{3}) = 0$. falsch

(d) Es gilt $\Pi_v\binom{2}{6} = \binom{4}{2}$. wahr

Antwort. (a) Für jedes reelle $\lambda \neq 0$ gilt $\Pi_{\lambda v}(u) = \Pi_v(u)$.

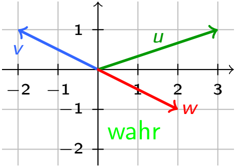
(b) Für jedes reelle λ gilt $\Pi_v(\lambda v) = \lambda v$.

(a) $\Pi_v(\Pi_v\binom{1}{3}) = \binom{2}{1}$.

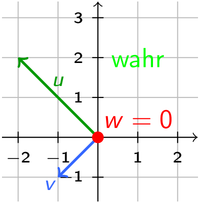
(b) $\Pi_v\binom{2}{6} = 2\Pi_v\binom{1}{3} = \binom{4}{2}$.

3.2 Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils drei Vektoren u, v und w in $\mathbb{R}^2$. Weiter bezeichnet Π_v die orthogonale Projektion auf v. Entscheiden Sie für jede der folgenden Abbildungen, ob $w = \Pi_v(u)$ gilt (wahr) oder nicht (falsch).

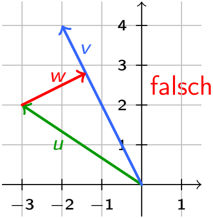
(a)



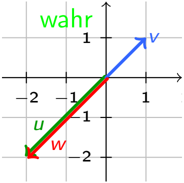
(b)



(c)



(d)



Antwort. Zerlegt man u in eine Komponente $u_{\|}$ parallel zu v und eine Komponente $u_{\perp}$ senkrecht zu v, so ist die Projektion von u auf v die Komponente $u_{\|}$.

4.1 Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sowie die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) $v_1 \in \mathrm{im}(A)$. wahr

(b) $v_1 \in \ker(A)$. falsch

(c) $v_2 \in \mathrm{im}(A)$. wahr

(d) $v_2 \in \ker(A)$. wahr

Antwort. (a) $-v_1$ ist die zweite Spalte von A.

(b) $Av_1 \neq 0$ (siehe z. B. die erste Komponente).

(c) v_2 ist die dritte Spalte von A.

(d) $Av_2 = 0$.

4.2 Betrachten Sie beliebige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) Es gilt $\dim(\mathrm{Im}(C)) < 3$. wahr

(b) Es gilt $\dim(\mathrm{Im}(A)) < 3$. wahr

(c) Es gilt $\dim(\ker(C)) > 0$. falsch

(d) Es gilt $\dim(\ker(A)) > 0$. wahr

Antwort. (a) Das Bild von C hat höchstens die Dimension 2 (C hat nur 2 Spalten).

(b) Das Bild von A (aufgespannt von den Spalten von A) hat höchstens die Dimension 2.

(c) Sind die Spalten von C linear unabhängig, liegt nur der Nullvektor im Kern.

(d) $Ax = 0$ hat nicht-triviale Lösungen, denn der Rang von A ist höchstens 2.

5.1 Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Wir diagonalisieren A mit Hilfe einer Transformationsmatrix T wie folgt: $A = TDT^{-1}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) D ist eine der folgenden Matrizen: $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ oder $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. wahr

(b) Es ist $A^{2022} = TD^{2022}T^{-1}$. wahr

(c) Die Spaltenvektoren von T bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$. wahr

(d) Die Spaltenvektoren von T sind orthogonal. falsch

Antwort. (a) $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A^n = TD^nT^{-1}$.

(c) T ist regulär.

(d) EV von A sind $\binom{3}{1}$ und $\binom{-3}{1}$.

5.2 Betrachten Sie die Matrix $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & -6 & 0 \\ -2 & 8 & -6 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von C sind orthogonal. wahr

(b) Alle Eigenwerte von C sind reell. wahr

(c) C ist diagonalisierbar mithilfe einer orthogonalen Transformationsmatrix. wahr

(d) Es existiert eine Eigenbasis zu C. wahr

Antwort. C ist symmetrisch.