Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

1.1. MC Fragen: Supremum und Infimum auf $\mathbb{R}$. Wählen Sie die einzig richtige Antwort.

(a) Wenn $x < y$ reelle Zahlen sind, dann $\frac{1}{1+y} \leq \frac{1}{1+x}$.

○ Richtig ● Falsch

Lösung: Dies ist nur den Fall, wenn $x + 1 > 0$ und $y + 1 > 0$ oder $x + 1 < 0$ und $y + 1 < 0$.

(b) Wenn $A \subset \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt, dann besitzt $A \cap \mathbb{Q}$ auch ein Maximum.

○ Richtig ● Falsch

Lösung: Zum Beispiel, sei $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq c\}$, wobei $c > 0$ ist, sodass $c^2 = 2$. Dann ist $\max(A) = c$, aber $A \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq c\}$ hat kein Maximum.

(c) Sei $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$. Dann gilt

○ $\max(A) = 1$, $\min(A) = 0$. ● $\max(A) = 1$, $\inf(A) = 0$.

○ A hat kein Maximum, $\inf(A) = 0$. ○ $\sup(A) = 1$, $\min(A) = 0$.

1.2. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $0 < x < y$, Folgendes gilt:

$$0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

Lösung: Aus dem Axiom der Multiplikation folgt, dass $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} > 0$ existieren, sodass $\frac{1}{x} \cdot x = \frac{1}{y} \cdot y = 1$ ist. Die Ordnung ist konsistent mit der Multiplikation:

$$0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot 0 < \frac{1}{x} \cdot x < \frac{1}{x} \cdot y \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot 0\right) < \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) < \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot y\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot 0\right) < \frac{1}{y} \cdot 1 < \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot y\right).$$

Aus der Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation folgt

$$\frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot y\right) = \frac{1}{y} \cdot \left(y \cdot \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{y} \cdot y\right) \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{x},$$

und daraus folgt, dass

$$\frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot 0\right) < \frac{1}{y} \cdot 1 < \frac{1}{x} \cdot 1.$$

Aus der Definition des Neutralen Elements der Multiplikation folgt, dass $1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y} \cdot 1 = \frac{1}{y}$. Weiterhin ist $\frac{1}{y} \cdot (\frac{1}{x} \cdot 0) = \frac{1}{y} \cdot 0 = 0$, weil $a \cdot 0 = 0$ für jede reelle Zahl a. Somit haben wir gezeigt, dass $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$, wenn $0 < x < y$.

1.3. ⋆ Ungleicheiten

(a) Seien a und b zwei reelle Zahlen und $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}).$$

Lösung: Aus der Distributivität der Multiplikation folgt

$$\begin{aligned}
&(b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}) \\
&\quad = b(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}) - a(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}) \\
&\quad = (b^n + b^{n-1}a + \cdots + b^2a^{n-2} + ba^{n-1}) - (ab^{n-1} + b^{n-2}a^2 + \cdots + ba^{n-1} + a^n),
\end{aligned}$$

und aus der Assoziativität der Addition und der Kommutativität der Multiplikation folgt

$$\begin{aligned}
&(b^n + b^{n-1}a + \cdots + b^2a^{n-2} + ba^{n-1}) - (ab^{n-1} + b^{n-2}a^2 + \cdots + ba^{n-1} + a^n) \\
&\quad = b^n + (b^{n-1}a - ab^{n-1}) + \cdots + (ba^{n-1} - a^{n-1}b) - a^n \\
&\quad = b^n - a^n.
\end{aligned}$$

(b) Folgern Sie, dass $0 \leq a^n \leq b^n$, wenn $0 \leq a \leq b$.

Lösung: Wenn $a, b \geq 0$, dann $(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}) \geq 0$ und $a^n \geq 0$, weil die Ordnung konsistent mit der Multiplikation und der Addition ist. Aufgabe 1.3(a) impliziert, dass

$$\begin{aligned}
a \leq b &\Leftrightarrow 0 \leq b - a \\
&\Leftrightarrow 0 \cdot (b^{n-1} + \cdots + a^{n-1}) \leq (b - a)(b^{n-1} + \cdots + a^{n-1}) \\
&\Leftrightarrow 0 \leq b^n - a^n \Leftrightarrow a^n \leq b^n.
\end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass $0 \leq a^n \leq b^n$, wenn $0 \leq a \leq b$.

(c) Folgern Sie auch, dass

$$0 \leq (a+h)^n - a^n \leq nh(a+h)^{n-1}$$

gilt, wenn $a \geq 0$ und $h \geq 0$.

Lösung: Aufgabe 1.3(b) impliziert, dass $a^k \leq (a+h)^k$ für jede natürliche Zahl k. Aus Aufgabe 1.3(a) folgt

$$\begin{aligned}
&(a+h)^n - a^n \\
&\qquad = (a+h-a)((a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2}a + \cdots + (a+h)a^{n-2} + a^{n-1}) \\
&\qquad = h((a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2}a + \cdots + (a+h)a^{n-2} + a^{n-1}) \\
&\qquad \leq h((a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2}(a+h) + \cdots + (a+h)(a+h)^{n-2} + (a+h)^{n-1}) \\
&\qquad = nh(a+h)^{n-1}.
\end{aligned}$$

(d) Sei $0 \leq a < 1$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass

$$0 \leq 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \leq \frac{1}{1-a},$$

für jede natürliche Zahl n.

Lösung: Aufgabe 1.3(b) impliziert, dass

$$0 \leq a < 1 \Rightarrow 0 \leq a^{n+1} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - a^{n+1} \leq 1,$$

und Aufgabe 1.3(a) impliziert, dass

$$\begin{aligned}
0 < 1 - a^{n+1} \leq 1 &\Leftrightarrow 0 < (1-a)(1^n + 1^{n-1}a + \cdots + 1 \cdot a^{n-1} + a^n) \leq 1 \\
&\Leftrightarrow 0 < (1-a)(1 + a + a^2 + \cdots + a^n) \leq 1.
\end{aligned}$$

Das Axiom der Multiplikation hat zur Folge, dass ein $\frac{1}{1-a} > 0$ existiert, sodass $\frac{1}{1-a} \cdot (1-a) = 1$. Daher gilt

$$0 \leq 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \leq \frac{1}{1-a},$$

weil die Ordnung konsistent mit der Multiplikation ist.