Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

2.1. MC Fragen: Intervalle, Komplexe Zahlen und Folgenkonvergenz. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Wenn A und B zwei Intervalle von $\mathbb{R}$ sind, dann ist $A \cup B$ auch ein Intervall.

○ Richtig ● Falsch

Lösung: z.B. $A = [0,1]$ und $B = [2,3]$. Dann ist $A \cup B = [0,1] \cup [2,3]$ kein Intervall.

(b) Seien $a_0, \ldots, a_4$ reelle Zahlen. Falls $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der folgenden Gleichung

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_4 z^4 + z^5 = 0,$$

ist, dann ist $\bar{z}$ auch eine Lösung.

● Richtig ○ Falsch

Lösung: Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \bar{a} = a.$$

Woraus folgt

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 z + \cdots + a_4 z^4 + z^5 = 0 &\Leftrightarrow \overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_4 z^4 + z^5} = \bar{0} \\ \bar{a}_0 + \overline{a_1 z} + \cdots + \overline{a_4 z^4} + \overline{z^5} = \bar{0} &\Leftrightarrow \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{z} + \cdots + \bar{a}_4 (\bar{z})^4 + (\bar{z})^5 = \bar{0} \\ &\Leftrightarrow a_0 + a_1 \bar{z} + \cdots + a_4 (\bar{z})^4 + (\bar{z})^5 = 0. \end{aligned}$$

(c) Sei z_1 und z_2 zwei komplexe Zahlen so, dass $|z_1| = |z_2|$. Dann, gilt $z_1 = z_2$ oder $z_1 = -z_2$.

○ Richtig ● Falsch

Lösung: z.B. $z_1 = 1$ und $z_2 = i$. Dann $|z_1| = |z_2| = 1$ aber $1 \neq i$ und $1 \neq -i$.

(d) Seit z eine komplexe Zahl. Dann existiert $b \in \mathbb{R}$ so, dass $z = ib$ genau dann, wenn $\bar{z} = -z$.

● Richtig ○ Falsch

Lösung: schreiben Sie z in kartesische Form $z = a + ib$. Dann gilt es

$$\bar{z} = -z \Leftrightarrow \overline{a + ib} = -(a + ib) \Leftrightarrow a - ib = -a - ib \Leftrightarrow a = -a \Leftrightarrow a = 0.$$

Dies zeigt, dass $\bar{z} = -z$ genau dann, wenn $z = ib$.

(e) Sei (a_n) eine konvergente Folge. Dann ist ihr Grenzwert > 0, wenn $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

○ Richtig ● Falsch

Lösung: z.B. $a_n = \frac{1}{n}$. Dann $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2.2. Ungleicheiten Zeigen Sie, dass für alle reelle Zahlen $a, b > 0$, folgendes gilt:

$$\frac{2}{1/a + 1/b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Lösung: Seien x und y reelle Zahlen. Aus

$$0 \leq (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy,$$

folgt

$$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}. \tag{1}$$

Wenn $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$ und $y = \frac{1}{\sqrt{b}}$, folgt insbesodere:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1/a + 1/b}{2},$$

und

$$\frac{2}{1/a + 1/b} \leq \sqrt{ab}.$$

In änlicher Weise gilt

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

wenn $x = \sqrt{a}$ und $y = \sqrt{b}$. Endlich, bemerken Sie, dass

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2+b^2),$$

woraus

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

2.3. Komplexe Zahlen I Bestimmen Sie für jede der folgenden komplexen Zahlen ihre kartesische Form $a + ib$.

$$(3+2i)(6-i), \qquad \frac{2i}{3-2i}, \qquad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

Lösung: Wir haben

$$(3+2i)(6-i) = 18 - 3i + 12i + 2i(-i) = 18 + 9i + 2 = 20 + 9i,$$

und

$$\frac{2i}{3-2i} = \frac{2i}{3-2i}\frac{3+2i}{3+2i} = \frac{-4+6i}{9+4} = -\frac{4}{13} + \frac{6}{13}i.$$

Bemerken Sie, dass

$$w := -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right),$$

woraus

$$w^3 = 1,$$

und

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = (-w)^3 = -w^3 = -1.$$

2.4. $\star$ **Komplexe Zahlen II** Sei $z = a + ib$ und $w = c + id$ zwei komplexe Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass $c \leq |w|$.

Lösung: Es gilt

$$|w| = \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{c^2} = |c| \geq c.$$

(b) Zeigen Sie, dass $z^2 = w$, genau dann wenn

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = c, \\ 2ab = d. \end{cases}$$

Lösung: Wir haben

$$\begin{aligned} z^2 = w &\Leftrightarrow (a+ib)^2 = (c+id) \Leftrightarrow a^2 - b^2 + i2ab = c + id \\ &\Leftrightarrow (a^2 - b^2 - c) + i(2ab - d) = 0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt genau dann, wenn

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = c, \\ 2ab = d. \end{cases}$$

(c) Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten

$$|w| = a^2 + b^2, \quad a^2 = \frac{1}{2}(|w| + c), \quad b^2 = \frac{1}{2}(|w| - c),$$

wenn $z^2 = w$.

Lösung: Aus Aufgabe 2.4(b) folgt:

$$|w|^2 = c^2+d^2 = (a^2-b^2)^2+(2ab)^2 = a^4+b^4-2a^2b^2+4a^2b^2 = a^4+b^4+2a^2b^2 = (a^2+b^2)^2,$$

woraus

$$|w| = a^2 + b^2.$$

Es ist klar, dass $a^2 = \frac{1}{2}(|w| + c)$ und $b^2 = \frac{1}{2}(|w| - c)$ Lösungen des Systemes

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = c, \\ 4a^2b^2 = d^2, \end{cases}$$

sind:

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{2}(|w| + c) - \frac{1}{2}(|w| - c) = c,$$

und

$$4a^2b^2 = (|w| + c)(|w| - c) = (|w|^2 - c^2) = (c^2 + d^2 - c^2) = d^2.$$

(d) Umgekehrt zeigen Sie, dass es für jede komplexe Zahl $w = c + id$ zwei reelle Zahlen a, b gibt, sodass

$$a^2 = \frac{1}{2}(|w| + c), \quad b^2 = \frac{1}{2}(|w| - c).$$

Darüber hinaus gelten die folgenden Gleichungen

$$a^2 - b^2 = c, \quad (2ab)^2 = d^2.$$

Lösung: Seien

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}(|w| + c)},$$

und

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}(|w| - c)}.$$

Aufgabe 2.4(a) impliziert, dass $|w| - c \geq 0$ und $|w| + c \geq 0$ (durch Ändern des Vorzeichens von c). Aus die Lösung der Aufgabe 2.4(b), folgt die Aussage.

(e) Folgern, dass eine Lösung $z = a + ib$ der folgenden Gelichung immer existiert:

$$z^2 = w.$$

Hinweis: Benutzen Sie die vorheirigen Fragen. Bemerken Sie, dass das Vorzeichen von a und b kann geändert werden.

Lösung: Seien

$$Z(d) := \begin{cases} 1, & \text{falls } d > 0, \\ 0, & \text{falls } d = 0, \\ -1, & \text{falls } d < 1, \end{cases}$$

$$a = Z(d)\sqrt{\frac{1}{2}(|w| + c)},$$

und

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}(|w| - c)}.$$

Aufgaben 2.4(b) und 2.4(d) implizieren, dass $z := a + ib$ die Gleichung

$$z^2 = w,$$

löst.

2.5. $\star$ **Folgenkonvergenz** Sei (a_n) eine konvergente reelle Folge. Zeigen Sie, dass (a_n) beschränkt ist. Das heißt, eine reelle Zahl $C \in \mathbb{R}$ existiert so, dass $|a_n| < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Eine Folge (a_n) heißt konvergent, falls es $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\},$$

endlich ist. Insbesondere, ist die Menge

$$E := \{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - 1, l + 1[\},$$

endlich, und es gibt ein Maximum $C_1 = \max\{|a_n| : n \in E\}$. Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus E$, es gilt

$$|a_n| = |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| \leq 1 + |l|.$$

Dann es gilt

$$|a_n| < C = \max\{1 + |l|, C_1\} + 1,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

2.6. Grenzwert Beweisen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = 0.$$

Lösung: Es gilt

$$\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{n - (n+1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

Daraus folgt

$$|\sqrt{n} - \sqrt{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{4\varepsilon^2} < n.$$

Wir haben gezeigt, dass für alle $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$|\sqrt{n} - \sqrt{n+1}| < \varepsilon$$

gilt, falls $n > N := (4\varepsilon^2)^{-1}$.