Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

3.1. MC Fragen: Supremum und Infimum auf $\mathbb{R}$. Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Der Wert von $\limsup \frac{(-1)^n}{n}$ ist

○ -1 ● 0 ○ 1

(b) Sei (a_n) eine reelle Folge so, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

○ Die Folge (a_n) ist konvergent, falls (a_n) monotone ist. ϟ: $a_n = n$.

○ $\liminf a_n < \limsup a_n$, falls (a_n) beschränkt ist. ϟ: $a_n = 1$.

○ Die Folge (a_n) ist konvergent, falls (a_n) streng monoton wachsend ist. ϟ: $a_n = n$.

● $\liminf a_n \geq 0$, falls (a_n) beschränkt ist.

Lösung: Sei $b_n := \inf\{a_k : k \geq n\}$. Dann, ist die Folge (b_n) auch positive und beschränkt. Das heißt: $\exists M > 0, \forall n, 0 < a_n, b_n < M$. Es folgt dann: $\liminf a_n = \lim b_n \in [0, M]$.

(c) Seien (a_n) und (b_n) zwei reellen Folgen. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

○ Die Folge (b_n) ist konvergent, falls $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und (a_n) konvergent ist. ϟ: $a_n = 1/n$ und $b_n = n$.

○ Beiden Folgen (a_n) und (b_n) sind konvergent, falls $|a_n - b_n| < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ϟ: $a_n = b_n = n$.

○ Die Folge (b_n) ist konvergent, falls (b_n^2) konvergent ist. ϟ: $b_n = (-1)^n$.

● Die Folge (b_n) konvergiert gegen 0, falls $0 \leq b_n \leq a_n^3$ und (a_n) konvergent gegen 0 ist.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Seit (a_n) konvergent ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n| < (\varepsilon/2)^{1/3}$, wenn $n \geq N$. Dann,

$$-a_n^3 \leq b_n - a_n^3 \leq 0,$$

impliziert, dass

$$|b_n| = |b_n - a_n^3 + a_n^3| \leq |b_n - a_n^3| + |a_n^3| \leq 2|a_n|^3 < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

(d) Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zu $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2$?

- ○ $\forall n \geq 1,\ \exists k \geq n,\ |a_n - 2| < \frac{1}{n}$.
- ○ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists k \geq 1,\ a_n \leq 2 + \varepsilon$.
- ● $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 1,\ \forall n \geq N,\ |a_n - 2| < \varepsilon$.
- ○ $\exists \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 1,\ \forall n \geq N,\ |a_n - 2| \leq \varepsilon$.

3.2. Grenzwert I Sei $a \in \mathbb{Z}$, und sei (a_n) definiert durch

$$a_n = \frac{n^a}{n!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen sie, dass es $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \geq N_0$.

Lösung: Wir zeigen, dass es $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass: $\forall n \geq N_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Tatsächlich gilt es

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^a}{(n+1)!}\frac{n!}{n^a} = \frac{(n+1)^a}{n!(n+1)}\frac{n!}{n^a} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \frac{1}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \frac{1}{n+1}.$$

Die Ungleichheit ist klar, wenn $a \leq 0$ ist. Wenn $a > 0$, denn

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^a \frac{1}{n+1} \leq \left(1+\frac{1}{1}\right)^a \frac{1}{n+1} = \frac{2^a}{n+1} < 1,$$

für jedes $n \geq N_0 = 2^a$.

(b) Folgern, dass (a_n) konvergent ist.

Lösung: Aus Aufgabe 3.2(a) ist die Folge (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt. Der Satz folgt dann aus Weierstrass Konvergenzkriterium (Satz 2.2.2).

(c) Beweisen Sie, dass (a_n) gegen 0 konvergiert.

Lösung: Aus Aufgabe 3.2(a) die folgende Gleichung gilt:

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \frac{1}{n+1} a_n.$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also

$$\begin{aligned}\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^a \frac{1}{n+1} a_n\right) \\ &= \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^a}_{=1} \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}}_{=0} \underbrace{\lim_{n\to+\infty} a_n}_{=\ell} = 0.\end{aligned}$$

3.3. ⋆ Limes superior und inferior

(a) Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $-X$ die Menge

$$-X := \{-x : x \in X\},$$

(z.B. $-[1,2] = [-2,-1]$). Zeigen Sie, dass $-X$ nicht leer und nach unten beschränkt ist, wenn X nicht leer und nach oben beschränkt ist. Beweisen Sie, dass folgendes gilt:

$$\inf(-X) = -\sup(X).$$

Lösung: Wenn es $x \in X$ gibt, dann ist $-x \in -X$. Darum ist $-X$ nicht leer. Sei $M := \sup(X)$. Die Zahl M ist endlich, weil X beschränkt nach oben ist. Dann

$$M = \sup(X) \Rightarrow (x \leq M, \forall x \in X) \Leftrightarrow (-M \leq -x, \forall x \in X) \Leftrightarrow (-M \leq y, \forall y \in -X).$$

Somit ist $-X$ nach unten beschränkt, und $\inf(-X) \geq -M = -\sup(X)$ ist. Sei $m := \inf(-X)$. In änlicher Weise gilt es

$$m = \inf(-X) \Rightarrow (m \leq y, \forall y \in -X) \Leftrightarrow (-y \leq -m, \forall y \in -X) \Leftrightarrow (x \leq -m \,\forall x \in X).$$

Nach $m \geq -M$ und $M \leq -m$, erhalten wir $\inf(-X) = m = -M = -\sup(X)$.

(b) Seien (a_n) eine reelle und beschränkte Folge, und t eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$\limsup(ta_n) = \begin{cases} t\limsup(a_n), & \text{wenn } t > 0, \\ 0, & \text{wenn } t = 0, \\ t\liminf(a_n), & \text{wenn } t < 0. \end{cases}$$

Lösung: Wenn $t = 0$, gibt es nichts zu beweisen. Sei $t > 0$. Wir bezeichnen mit tX die Menge $\{tx : x \in X\}$, wobei X eine beliebige Teilmenge ist. Wir zeigen, dass $\sup(tX) = t\sup(X)$, wenn X nach oben beschränkt ist. Sei $M = \sup(X)$. Dann

$$M = \sup(X) \Rightarrow (x \leq M \,\forall x \in X) \Leftrightarrow (tx \leq tM \,\forall x \in X) \Leftrightarrow (y \leq tM \,\forall y \in tX).$$

Somit ist $\sup(tX) \leq tM = t\sup(X)$. Dann

$$\sup(X) = \sup(\frac{1}{t}(tX)) \leq \frac{1}{t}\sup(tX) \Rightarrow t\sup(X) \leq \sup(tX),$$

woraus folgt $\sup(tX) = t\sup(X)$. Diese Gleichung impliziert, dass

$$\begin{aligned}\limsup(ta_n) &= \lim_n\Big(\sup\{ta_k : k \geq n\}\Big) = \lim_n\Big(t\sup\{a_k : k \geq n\}\Big)\\ &= t\lim_n\Big(\sup\{a_k : k \geq n\}\Big) = t\limsup(a_n),\end{aligned}$$

wenn $t > 0$ und (a_n) beschränkt nach oben ist. Sei $t < 0$. Dann Aufgabe 3.3.(a) impliziert, dass

$$\begin{aligned}\limsup(ta_n) &= \lim_n\Big(\sup\{ta_k : k \geq n\}\Big) = \lim_n\Big(\sup\{(-t)(-a_k) : k \geq n\}\Big)\\ &= -t\lim_n\Big(\sup\{-a_k : k \geq n\}\Big)\\ &= -t\lim_n\Big(-\inf\{a_k : k \geq n\}\Big) = t\liminf(a_k).\end{aligned}$$

3.4. Grenzwert II Man untersuche die nachstehenden Zahlenfolgen. Konvergieren sie? Wenn ja: Welches ist ihr Grenzwert?

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3+n^2-1}{5(n^3)!+2},$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n^2+12}{1000n+\sqrt{n}},$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+2}{(-1)^n n^4+7},$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n!}{(n!)^2+1}.$$

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$0 < \frac{2}{5(n^3)!+2} < \frac{2n^3+n^2-1}{5(n^3)!+2} \leq \frac{3n^3}{5(n^3)!+2} < \frac{3n^3}{3(n^3)!} = \frac{n^3}{(n^3)!} < \varepsilon,$$

wenn $n > N$ ist (Siehe Lösing 3.2.(b) mit n^3 statt n). Diese Folge konvergiert gegen 0. Wenn n gearde ist, gilt es

$$\frac{(-1)^n n^2+12}{1000n+\sqrt{n}} = \frac{n^2+12}{1000n+\sqrt{n}} \geq \frac{n^2}{1000n+n} = \frac{n^2}{1001n} = \frac{n}{1001}.$$

Diese Folge ist nicht nach unten beschränkt, deshalb konvergiert sie nicht. Wir haben

$$-\varepsilon < -\frac{1}{n} = -\frac{n^3}{n^4} < \frac{n^3}{7-n^4} \leq \frac{n^3+2}{(-1)^n n^4+7} \leq \frac{n^3+2}{n^4+7} \leq \frac{3n^3}{n^4} = \frac{3}{n} < \varepsilon,$$

wenn $n > 3/\varepsilon$ ist. Deshalb konvergiert diese Folge gegen 0. Schließlich bemerken wir, dass

$$0 < \frac{2n!}{(n!)^2 + 1} \leq \frac{2n!}{(n!)^2} = \frac{2}{n!} \leq \frac{2}{n} < \varepsilon,$$

wenn $n > 2/\varepsilon$ ist. Diese Folge konvergiert gegen 0 auch.