Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

4.1. MC Fragen: Konvergenzkriterium. Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Sei (a_n) eine reelle Folge. Welche der folgenden Aussagen $a_n \to +\infty$ impliziert?

- ● Es gibt $N \geq 0$, sodass $a_n \geq 12n$ für alle $n \geq N$.
- ○ $a_n = 1/b_n$, und $b_n \to 0$. ϟ: $b_n = -1/n \Rightarrow a_n \to -\infty$.
- ○ Für jedes $N \geq 1$ existiert $n \geq N$, sodass $a_n > 2^n$. ϟ: $a_n = 0$ wenn n gerade ist, $a_n = 2^n + 1$, wenn n ungerade ist.
- ○ $a_{n+1} - a_n$ ist unbeschränkt. ϟ: $a_n = n(-1)^n$.

(b) Seien (a_n) und (b_n) zwei reelle Folgen, und $c_n = a_n + b_n$. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ○ Wenn (c_n) konvergent ist, dann sind (a_n) und (b_n) konvergenten, und gilt es
$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} c_n.$$
ϟ: $a_n = -n$, $b_n = n$.
- ● Wenn (b_n) und (c_n) konvergenten sind, dann konvergiert (a_n), und gilt es
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$
- ○ Mindestens eine der beiden Folgen (a_n) und (b_n) konvergent ist, wenn (c_n) konvergent ist. ϟ: $a_n = -n$, $b_n = n$.
- ○ Die Folge (a_n) ist beschränkt, wenn (c_n) beschränkt ist. ϟ: $a_n = -n$, $b_n = n$.

(c) Sei (a_n) eine reelle Folge. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ○ Die Folge (a_n) ist konvergent, wenn $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ϟ: $\varepsilon = 2$, $a = 0$ und $a_n = (-1)^n$.
- ● Die Folge $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ ist konvergent, wenn (a_n) konvergent ist.
- ○ Die Folge (a_n) ist konvergent, wenn die Ungleicheiten $a_n \geq 0$ und $a_{n+1} \geq a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelten. ϟ: $a_n = n$.

4.2. $\star$ **Rekursive Folge** Sei $c > 1$. Die reelle Folge (a_n) sei rekursive gegeben durch

$$\begin{cases} a_1 = c, \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{c}{a_n^2}\right), \quad n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$. Insbesondere ist die Folge (a_n) wohldefiniert.

Lösung Es gilt

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}\Big(2a_n + \frac{c}{a_n^2}\Big) > \frac{2}{3}a_n,$$

woraus

$$a_{n+1} > \frac{2}{3}a_n > \left(\frac{2}{3}\right)^2 a_{n-1} > \left(\frac{2}{3}\right)^3 a_{n-2} > \cdots > \left(\frac{2}{3}\right)^n a_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^n c > 0.$$

Die Folge ist wohldefiniert.

(b) Zeigen Sie, dass $a_n^3 > c$ für jedes $n \geq 2$.

Lösung: Sei

$$a_{n+1} = a_n + \left(\frac{c - a_n^3}{3a_n^2}\right),$$

und für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^3 = \left(a_n + \left(\frac{c - a_n^3}{3a_n^2}\right)\right)^3 &= a_n^3 + 3a_n^2\left(\frac{c - a_n^3}{3a_n^2}\right) + 3a_n\left(\frac{c - a_n^3}{3a_n^2}\right)^2 + \left(\frac{c - a_n^3}{3a_n^2}\right)^3 \\
&= a_n^3 + (c - a_n^3) + 3a_n\left(\frac{c - a_n^3}{3a_n^2}\right)^2 + \left(\frac{c - a_n^3}{3a_n^2}\right)^3 \\
&= a_n^3 + (c - a_n^3) + \left(\frac{c - a_n^3}{3a_n^2}\right)^2\left(3a_n + \frac{c - a_n^3}{3a_n^2}\right) \\
&= c + \underbrace{\left(\frac{c - a_n^3}{3a_n^2}\right)^2}_{>0}\underbrace{\left(\frac{8a_n^3 + c}{3a_n^2}\right)}_{>0} \\
&> c.
\end{aligned}$$

(c) Ableiten Sie, dass (a_n) konvergent ist.

Lösung: Aus Aufgabe 3.5(b) ist (a_n) nach unten beschränkt.

Aus $a_n^3 > c$ folgt dann

$$a_{n+1} = a_n + \left(\frac{c - a_n^3}{3a_n^2}\right) < a_n.$$

Also ist (a_n) monoton fallend. Nach Weierstrass existiert ein Grenzwert der Folge (a_n).

(d) Sei ℓ der Grenzwert der Folge (a_n). Zeigen Sie, dass $\ell \geq 1$ und $\ell^3 = c$.

Lösung:

Sei $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$. Aus $a_n^3 > c > 1$ folgt dann $\ell \geq 1$. Schließlich zeigen wir, dass

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n + \left(\frac{c - (\lim_{n\to+\infty} a_n)^3}{3(\lim_{n\to+\infty} a_n)^2}\right) = \ell + \left(\frac{c-\ell^3}{3\ell^2}\right).$$

Woraus $\ell^3 = c$.

4.3. Komplexe Folgen I Seien (a_n) eine beschränkte komplexe Folge und (b_n) eine reelle Folge, sodass $b_n \to +\infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

gilt. Hier liegt die Grenze bei den komplexen Zahlen.

Lösung: Sei $M = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Der Wert M ist endlich, weil (a_n) beschränkt ist. Sei $\varepsilon > 0$. Da (b_n) gegen $+\infty$ divergiert, gibt es $N \geq 1$ so, dass

$$|b_n| > \frac{M}{\varepsilon}, \quad \forall n \geq N.$$

Dann gilt

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| = \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{|a_n|}{|b_n|} \leq \frac{M}{|b_n|} < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Daraus folgt, dass (a_n) gegen 0 in $\mathbb{C}$ konvergiert.

4.4. Komplexe Folgen II Sei $q \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl so, dass $|q| < 1$. Die komplexe Folge (a_n) ist durch

$$a_n = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$(1-q)^2 a_n = nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1.$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}(1-q)^2 a_n &= (1-2q+q^2)a_n = \\ &= 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots + nq^{n-1} \\ &\quad - 2q - 4q^2 - 6q^3 - \cdots - 2(n-1)q^{n-1} - 2nq^n \\ &\qquad + q^2 + 2q^3 + \cdots + (n-2)q^{n-1} + (n-1)q^n + nq^{n+1} \\ &= 1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}.\end{aligned}$$

(b) Ableiten Sie, dass (a_n) konvergent ist. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

Lösung: Aus dem vorheirigen Punkt (a), es gilt

$$a_n = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2}.$$

Das ist wohldefiniert, weil $q \neq 1$ ist. Dann es gilt:

$$\left| a_n - \frac{1}{(1-q)^2} \right| = \left| \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n}{(1-q)^2} \right| \leq \frac{n|q|^{n+1} + (n+1)|q|^n}{|1-q|^2}.$$

Wenn $n|q|^{n+1}$ und $(n+1)|q|^n$ gegen 0 konvergieren, dann gilt es:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| a_n - \frac{1}{(1-q)^2} \right| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{n|q|^{n+1} + (n+1)|q|^n}{|1-q|^2} = 0.$$

Daraus folgt: $a_n \to \frac{1}{(1-q)^2}$. Zuerst zeigen wir $b_n = n|q|^{n+1} \to 0$. Es gilt

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)|q|^{n+2} - n|q|^{n+1} = n|q|^{n+1}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)|q| - 1\right).$$

Da $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ gegen 1 konvergiert, existiert $N \geq 1$ so, dass

$$b_{n+1} - b_n < 0, \quad b_n > 0, \quad \forall n \geq N.$$

Nach Weierstrass existiert ein Grenzwert $\ell \in \mathbb{R}$ der Folge (b_n). Aus

$$b_{n+1} = \frac{n+1}{n}|q|b_n,$$

folgt es

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}|q|b_n\right) = |q| \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) \lim_{n\to+\infty} b_n = |q|\ell,$$

woraus $\ell = 0$. Endlich,

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)|q|^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n|q|} b_n = \frac{1}{|q|} \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

4.5. $\star$ **Komplexe Folgen III** Sei (a_n) eine komplexe Folge, sodass

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchy Folge ist. Folgern, dass (a_n) konvergent ist.

Lösung: Sei $m \geq n$. Dann es gilt:

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= |a_n - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - \cdots + a_{m-1} - a_m| \\ &\leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{m-1} - a_m| \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} = \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{2^j}.\end{aligned}$$

Im Beispiel 2.7.2 haben wir gezeigt dass die Reihe

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j}$$

gegen 2 konvergiert. (Das ist eine Geometrische Reihe). Aus Satz 2.7.5 folgt, dass für alle $\varepsilon > 0$, gibt es $N \geq 1$, sodass

$$\left| \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{2^j} \right| \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Das impliziert, dass (a_n) eine Cauchy Folge ist. Aus Satzt 2.6.6 konvergiert die Folge genau dann, wenn (a_n) Cauchy ist.