Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

5.1. MC Fragen: Konvergente Reihen. Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Sei $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ eine konvergente Reihe. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

○ Die Folge $(x_{n+1} - x_n)$ konvergiert gegen 0.

● Die Reihe ist genau dann absolut konvergent, falls

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq n \geq N, |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

ϟ: $\Leftrightarrow$ (x_n) ist Cauchy $\Leftrightarrow$ (x_n) ist konvergent $\not\Rightarrow$ die Reihe ist konvergent.

○ Es gibt $C \geq 0$, sodass

$$|x_n + \cdots + x_{2n}| \leq C, \quad \forall n \geq 0.$$

(b) Sei (x_n) eine reelle Folge, sodass $x_n \leq \frac{1}{n^2}$ für alle $n \geq 1$.

○ Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ ist konvergent, aber nicht unbedingt absolut konvergent. ϟ: $x_n = -n$.

○ Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ ist absolut konvergent. ϟ: $x_n = -n$.

● Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ ist absolut konvergent, falls $|y_n| \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|\sum_{n=m}^{M} \frac{1}{n^2}| < \varepsilon, \forall M \geq m \geq N_0$. Dann folgendes gilt: $\sum_{n=m}^{M} |y_n| \leq \sum_{n=m}^{M} \frac{1}{n^2} < \varepsilon$, für alle $M \geq m \geq N_0$, woraus folgt, dass die Reihe absolut konvergent ist.

(c) Seien (x_n) eine komplexe Folge und $C \geq 0$, sodass $2^n |x_n| \leq C$ für alle $n \geq 10$.

○ Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ ist höchstens 2.

○ Die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty}$ ist konvergent, aber nicht unbedingt absolut konvergent.

● Die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n x_n$ ist absolut konvergent.

Lösung: Die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n/2^{2n}$ ist konvergent (z.B. aus dem Quotientenkriterium: $\lim_{n\to+\infty} (3^{n+1}/2^{2(n+1)})/(3^n/2^{2n}) = 3/4 < 1$). Es gilt $|(3/2)^n x_n| = (3/2)^n |x_n| \leq 3^n/2^{2n}$, woraus folgt, dass die Reihe absolut konvergent ist.

5.2. Konvergenzkriterium Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+1}{n^5+3n^4+3n^3+2n^2+1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Lösung: Die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^{n+1}$ ist nicht konvergent, weil (z.B.) die Folge $n(-1)^{n+1}$ nicht gegen 0 konvergiert. Die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+1}{n^5+3n^4+3n^3+2n^2+1}$ ist absolut konvergent: bemerken Sie, dass

$$0 \leq \frac{n^3+1}{n^5+3n^4+3n^3+2n^2+1} < \frac{2n^3}{n^5} = \frac{2}{n^2}, \quad \forall n \geq 1$$

gilt, und die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} 2/n^2$ absolut konvergent ist. Die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ ist absolut konvergent aus dem Quotientenkriterium:

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2((n+1))^2}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n^2+2n+1-n^2}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1.$$

Aus Satz 2.48 (Leibniz) ist die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergent, aber nicht absolut konvergent ($1/\sqrt{n} \geq 1/n, \forall n \geq 1$, und $\sum_n 1/n$ divergent ist).

5.3. $\star$ **Komplexe Reihe** Sei (x_n) eine komplexe Folge, sodass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ konvergent ist.

(a) Zeigen Sie, dass $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $|x_n^2| \leq |x_n|$ für alle $n \geq N_0$ ist.

Lösung: Die Konvergenz der Reihe impliziert, dass x_n gegen 0 konvergiert. Sei $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n| < 1$ für alle $n \geq N_0$. Dann gilt: $|x_n^2| = |x_n|^2 \leq |x_n|$ für jedes $n \geq N_0$.

(b) Folgern, dass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$ absolut konvergent ist, falls $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ absolut konvergent ist.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_n x_n$ impliziert, dass $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$\sum_{n=m}^{M} |x_n| < \varepsilon, \quad \forall M \geq m \geq N.$$

Sei $N_1 := \max\{N_0, N\}$. Dann aus Aufgabe 5.3(a) folgt:

$$\sum_{n=m}^{M} |x_n|^2 \leq \sum_{n=m}^{M} |x_n| < \varepsilon, \quad \forall M \geq m \geq N_1,$$

woraus $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$ absolut konvergent ist.

(c) Zeigen Sie, dass, wenn $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ nicht absolut konvergent ist, es sein kann, dass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$ divergiert.

Lösung: Die Reihe von Aufgabe 5.2 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ist konvergent aber nicht absolut konvergent, und

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

divergent ist.

5.4. Konvergenzradius Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$$

gleich 4 ist. *(Hinweis: Benutzen Sie das Quotientenkriterium.)*

Lösung: Sei $x_n := (n!)^2 z^n/(2n)!$ Die Reihe konvergiert trivial, wenn $z = 0$ ist. Nehmen wir an, dass $z \neq 0$ ist. Wir berechnen den folgenden Limes:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} |z|^{n+1} \frac{(2n)!}{|z|^n (n!)^2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2(n+1)^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} \frac{(2n)!}{(n!)^2} |z| = |z| \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= |z| \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4(2n+1)}\Big) = \frac{|z|}{4}.
\end{aligned}$$

Aus dem Quotientenkriterium, die Reihe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$$

ist absolut konvergent, falls

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{|z|}{4} < 1,$$

wobei $|z| < 4$. Die Reihe ist divergent, falls

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{|z|}{4} > 1,$$

wobei $|z| > 4$. Wir haben gezeigt, dass der Konvergenzradius der Folge gleich 4 ist.

5.5. $\star$ **Wurzelkriterium** Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und ganze Zahl $n \geq 1$ existiert eine einzige Zahl y, sodass $y^n = x$ ist. Wir bezeichnen $y = \sqrt[n]{x}$.

Sei (x_n) eine komplexe Folge, sodass die Folge $\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right)$ gegen $\ell \in \mathbb{R}$ konvergente ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ absolut konvergent ist, falls $\ell < 1$ ist.

Lösung: Sei $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left|\sqrt[n]{|x_n|} - \ell\right| < (1-\ell)/2, \quad \forall n \geq N_0.$$

Dann gilt $\sqrt[n]{|x_n|} < \ell + (\ell - 1)/2 = (3\ell - 1)/2 = q$, woraus

$$|x_n| < q^n, \quad \forall n \geq N_0$$

folgt. Da $q < 1$ folgt aus dem Vergleichssatz 2.43, dass die Reihe absolut konvergent ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergent ist, falls $\ell > 1$ ist.

Lösung: Sei $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left|\sqrt[n]{|x_n|} - \ell\right| < (\ell - 1)/2, \quad \forall n \geq N_0.$$

Dann gilt $\sqrt[n]{|x_n|} > \ell - (\ell - 1)/2 = (\ell + 1)/2 = p$, woraus

$$|x_n| > p^n, \quad \forall n \geq N_0$$

folgt. Da $p > 1$ die Folge divergent ist.