Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

6.1. MC Fragen: Doppelte Summation und stetige Funktionen Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Sei $(a_{n,m})$ eine reelle Doppelfolge. Welche der folgenden Bedingungen impliziert, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m}\Big).$$

- ○ Keine Bedingung erforderlich ist. Diese Gleichign ist immer wahr.
- ○ Wenn eine Kostante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|a_{n,m}| \leq C$ für alle n und m.
- ○ Wenn eine Kostante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

  $$\sum_{m=0}^{M}\Big(\sum_{n=0}^{N} a_{n,m}\Big) \leq C,$$

  für alle M und N.
- ● Wenn eine Kostante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

  $$\sum_{m=0}^{M}\Big(\sum_{n=0}^{N} |a_{n,m}|\Big) \leq C,$$

  für alle M und N.

$\lightning$: $a_{n,m} = 1$ wenn $n = m$, $a_{n,m} = -1$ wenn $n+1 = m$, $a_{n,m} = 0$ in den anderen Fällen (Beispiel am Seite 36).

(b) Welche der folgenden Bedingungen impliziert *nicht*, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist:

- ○ Es gibt $C \geq 0$, sodass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- ● Es gibt $C \geq 0$, sodass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \geq 1$.
  $\lightning$: $C = 1$, $f(x) = 0$ wenn $x < 0$ und $f(x) = 1$ wenn $x \geq 0$.
- ○ Es gibt $C \geq 0$, sodass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^2$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \leq 1$.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Eigenschaften ist zutreffend:

- ○ Es gibt $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x_0) = 0$ ist.
- ○ Wenn (x_n) eine reelle Folge ist, sodass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = 2$, dann $f(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)$.

- Es gilt

$$f(0) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

ϟ: $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist richtig.

○ Jede monotone Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ ist stetig.

○ Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ ist monoton.

● Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ ist surjektiv, wenn $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.

ϟ: $f(x) = 1$ wenn $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ und $f(x) = 0$ wenn $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

6.2. ⋆ **Stetigkeit I** Finden Sie die Werten $a, b \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + b, & \text{wenn } x \le -1, \\ (a+b)x, & \text{wenn } -1 < x < 1, \\ x^2 + ax - b, & \text{wenn } x \ge 1 \end{cases}$$

definitert ist, stetig in $\mathbb{R}$ ist. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

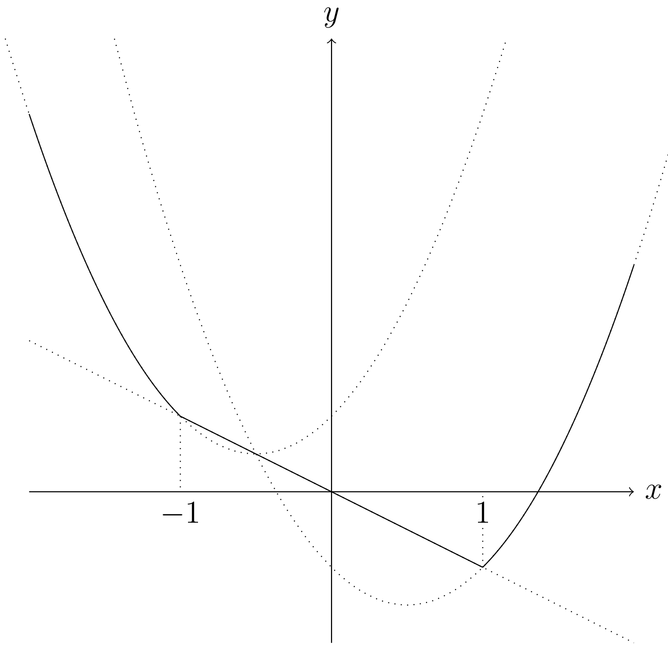
Lösung: Die polynomialen Funktionen

$$f_1(x) = x^2 - ax + b, \quad f_2(x) = (a+b)x, \quad f_3(x) = x^2 + ax - b,$$

sind stetig in $\mathbb{R}$ (Korollar 3.2.7). Folgendes gilt

$$f_1(-1) = f_2(-1) \text{ und } f_2(1) = f_3(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + b = -a - b, \\ a + b = 1 + a - b. \end{cases} \quad \Leftrightarrow a = -1, b = \frac{1}{2}.$$

Hier ist eine Skizze der Funktion f. Gepunktete sind die Funktionen f_1, f_2 und f_3.



6.3. Stetigkeit II Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen in angegebenen Gebiet stetig sind.

$$D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(\exp(x^3 - 2)),$$
$$D =]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\exp(x^2) + 1}.$$

Lösung:. Die Funktionen $x \mapsto (x^3 - 2)$ und $x \mapsto \exp(x)$ sind stetig in $D = \mathbb{R}$ (Korollar 3.2.7 und Satzt 3.6.1). Aus Satzt 3.5.1, folgt dass $f(x) = \exp(\exp(x^3 - 2))$ stetig in $D = \mathbb{R}$ ist. Aus Korollar 3.2.5 folgt in änlicher Weise, dass $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\exp(x^2)+1}$ stetig in $D =]0, +\infty[$ ist, weil die Funktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto (\exp(x^2) + 1)$ nicht gleich 0 in D sind.

6.4. Grenzwerten Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{n \to +\infty} e^{(n^3+2)/(n^3-6)},$$
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{1/n}}{e^{n^2/(n^2+1)} + 3}.$$

Lösung: Sei $a_n = \frac{n^3+2}{n^3-6}$ für alle $n \geq 2$. Diese Folge ist wohldefiniert weil $n^3 - 6 > 0$ für alle $n \geq 2$. Dann es gilt

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2}{n^3-6} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{8}{n^3-6}\right) = 1.$$

Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion und Satzt 3.2.4 folgendes gilt:

$$\lim_{n\to+\infty} e^{(n^3+2)/(n^3-6)} = \lim_{n\to+\infty} e^{a_n} = e^1 = e.$$

Sei

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{1/(1+x^2)} + 3},$$

sodass

$$f(1/n) = \frac{e^{1/n}}{e^{1/(1+1/n^2)} + 3} = \frac{e^{1/n}}{e^{n^2/(n^2+1)} + 3}.$$

Dann $f(x)$ ist eine stetige Funktion, und darauf

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/n}}{e^{n^2/(n^2+1)} + 3} = \lim_{n\to+\infty} f(1/n) = f(0) = \frac{1}{e+3}.$$

6.5. Stetigkeit III Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $x_0 \in I$, sodass $f(x_0) > 0$ ist. Zeigen Sie, dass $\delta > 0$ existiert, sodass $f(x) > 0$, wenn $|x - x_0| < \delta$ ist.

Hinweis: Anwendung der Definition der Stetigkeit mit einem gut gewählten $\varepsilon > 0$.

Lösung: Für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in I$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon,$$

gilt. Nach dieser Definition folgt, dass

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x).$$

Es genügt $\varepsilon = f(x_0)/2$ zu wählen, um

$$0 < f(x_0)/2 < f(x) \text{ falls } |x - x_0| < \delta,$$

zu zeigen.

6.6. $\star$ **Folgen und Funktionen** Sei $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ die Funktion die durch $f(x) = \sqrt{x+1}$ definiert ist.

(a) Sei $x_0 \in [0, +\infty[$. Zeigen Sie, dass

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|,$$

für alle $x \geq 0$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1}| &= \left|(\sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1})\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x_0+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x_0+1}}\right| \\ &= \left|\frac{(x+1) - (x_0+1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x_0+1}}\right| = \frac{|x - x_0|}{|\sqrt{x+1} + \sqrt{x_0+1}|} \geq |x - x_0|. \end{aligned}$$

(b) Ableiten Sie, dass f stetig ist.

Lösung: Es genügt $\delta = \varepsilon$ in der Definition der Stetigkeit wählen.

(c) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.

Lösung: Sei $x < x_0$. Wir zeigen, dass $f(x) < f(x_0)$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1} &= (\sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1})\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x_0+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x_0+1}} \\ &= \frac{(x+1) - (x_0+1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x_0+1}} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x_0+1}} < 0. \end{aligned}$$

(d) Die reelle Folge (a_n) sei rekursive gegeben durch

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = f(a_n), \quad \text{für } n \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) wohldefiniert ($a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$) und monoton fallend ist.

Lösung: Die Zielmenge der Funktion $f(x)$ ist eine Teilmenge des Intervall $[1, +\infty)$, weil f monoton wachsend ist, und $f(0) = 1$. Es folgt, dass

$$1 \leq a_n,$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt: $a_1 - a_2 = 2 - f(2) = 2 - \sqrt{2+1} > 0$. Das ist der Induktionsanfang. Jetzt zeigen wir

$$a_{n-1} - a_n \geq 0 \Rightarrow a_n - a_{n+1} \geq 0, \quad \forall n \geq 2.$$

Die Funktion $f(x)$ ist monoton wachsend, dann

$$a_n - a_{n+1} = f(a_{n-1}) - f(a_n) \geq 0,$$

da $a_{n-1} \geq a_n$ aus Induktionsvoraussetzung. Wir haben gezeigt, dass a_n monoton fallend ist.

(e) Zeigen Sie, dass (a_n) konvergent gegen einen Grenzwert $\ell \in \mathbb{R}$ ist, und dass die Gleichung $\ell = \sqrt{\ell + 1}$ gilt.

Lösung: Die Folge ist monoton fallend und nach unten beschränkt, dann kovergiert es mit Grenzwert ℓ. Da $f(x)$ stetig ist, es gilt

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(\ell) = \sqrt{\ell + 1}.$$

(f) Den Wert von ℓ ableiten.

Lösung: Die Gleichung $\ell = \sqrt{\ell + 1}$ impliziert, dass $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Das ist der Goldener Schnitt.