Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

7.1. MC Fragen: Stetige Funktionen Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass (f_n) gleichmässig in $\mathbb{R}$ gegen f konvergiert.

- ● Die Funktion f ist stetig, falls f_n stetig für alle gerade $n \geq 2$ ist.
- ○ Die Funktionfolge (f_n^2) konvergiert gleichmässig. ϟ: $f_n(x) = x + 1/n$.
- ○ Die Funktion f ist strikt monoton wachsend, falls f_n strikt monoton wachsend für alle n ist. ϟ: $f_n(x) = g(x)/n$, mit $g : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ strikt monoton wachsend.
- ○ Mindestens eine der Funktionen f_n ist stetig, falls f stetig ist. ϟ: $f_n(x) = 1/n$ wenn $x \leq 0$ und $f_n(x) = -1/n$ wenn $x > 0$.

(b) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

- ○ Wenn $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [0, 1]$, dann gibt es $N \geq 1$, sodass $f(x) \geq 1/N$ für alle $x \in [0, 1]$. ϟ: $f(x) = -1$.
- ○ Wenn $f(0) = 1/2$ und $f(1) = 1/4$, dann gibt es $x \in]0, 1[$, sodass $f(x) < 1/4$. ϟ: $f(x) = 1/2 - x/4$.
- ● Wenn $f(0) < 1$ und $f(1) > e$, dann gibt es $x \in [0, 1]$, sodass $f(x) = e^x$.

(c) Sei $f : [0, 1] \to [0, +\infty[$ eine beliebige Funktion.

- ○ Die Funktion f ist monoton, wenn f bijektiv ist. ϟ: Monotone und bijektive Funktionen sind stetig, aber es gibt keine stetige Bijektion $[0, 1] \to [0, +\infty)$.
- ● Die Funktion f ist nicht bijektiv, wenn f stetig ist.
- ○ Die Funktion f ist stetig, wenn f monoton ist. ϟ: $f(x) = x$ wenn $x < 0$, $f(x) = x + 1$ wenn $x \geq 0$.

7.2. $\star$ Existenz von Lösungen Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen mindestens eine reelle Lösung in dem angegebenen Bereich haben. Finden Sie für jede Gleichung ein begrenztes Intervall in dem die Lösung gehört.

$$\begin{aligned} e^x &= \sqrt{x} + 2, \quad x > 0, \\ x^4 - x - 12 &= 0, \quad x < 0, \\ x^x - 2x &= 0, \quad x > 1, \\ xe^x &= 1, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Hinweis: Anwenden Sie den Zwischenwertsatz in einem passenden Intervall. Für die erste Gleichung kann man verwenden, dass $e^x \geq x$ für alle $x \geq 0$.

Lösung: Sei $g(x) = e^x - \sqrt{x} - 2$. Die Funktion g ist stetig in $x > 0$. Aus $e \simeq 2.71 < 3$ und $e^x \geq x$, $\forall x \geq 0$ folgt

$$g(1) = e - 1 - 2 < 0, \quad g(4) = e^4 - \sqrt{4} - 2 \geq 4 - \sqrt{4} - 2 = 0.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass $x_0 \in [1,4]$ gibt, sodass $g(x_0) = 0$. Das is äquivalent zu $e^{x_0} = \sqrt{x_0} + 2$. Die Funktion $x^4 - x - 12$ ist stetig in $\mathbb{R}$ und es gilt

$$(-2)^4 - (-2) - 12 = 6 > 0, \quad (-1)^4 - (-1) - 12 = 2 - 12 = -10 < 0,$$

woraus

$$\exists x_0 \in [-2,-1] : x_0^4 - x_0 - 12 = 0,$$

folgt. Der Wert $x = 2$ erfüllt die Gleichung $x^x - 2x = 0$. Für die letzte Gleichung, sei $g(x) = xe^x - 1$. Diese Funktion ist stetig in $\mathbb{R}$. Nach $g(0) = 0 - 1 = -1$ und $g(1) = e - 1 > 0$ folgt, dass $x_0 \in]0,1[$ existiert, sodass $x_0 e^{x_0} = 1$.

7.3. Zwischenwertsatz Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass es $x \in [0,1]$ gibt, sodass $f(x) = x$.

Lösung: Sei $g(x) = f(x) - x$. Dann ist $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Aus $f(x) \in [0,1] \, \forall x \in [0,1]$ folgt

$$g(0) = f(0) - 0 \geq 0, \quad g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es $x_0 \in [0,1]$ existiert, sodass $g(x_0) = 0$. Woraus $f(x_0) = x_0$ folgt.

7.4. Eine besondere Funktion Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass $f(x) = f(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(x) = f(x/2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann es gilt

$$f(x/2^n) = f(2(x/2^n)) = f(2^2(x/2^n)) = \cdots = f(2^n(x/2^n)) = f(x).$$

(b) Folgern, dass f eine konstante Funktion ist.

Lösung: Sei $x \in \mathbb{R}$. Die Folge (x_n) definiert durch $x_n := x/2^n$ konvergiert gegen 0. Aus Aufgabe 7.3.(a) es folgt, dass

$$f(x) = f(x/2^n) = f(x_n).$$

Durch die Stetigkeit der Funktion f es gilt

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(0),$$

woraus $f(x) = f(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

7.5. Gleichmässige Konvergenz Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionfolgen in dem gegebenen Bereich gleichmässig konvergenten sind. Finden Sie die Grenzwerten.

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2} + x + 1, \quad x \in [0,1],$$
$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{kx}}{k!}, \quad x \in [0,1].$$

Lösung: Die Funktionfolge $f_n(x) = x/n^2 + x + 1$ konvergiert punktweise gegen $f(x) = x + 1$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{n^2} + x + 1\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{n^2}\right) + x + 1 = x + 1.$$

Wir zeigen, dass f_n gegen f gleichmässig konvergiert. Für alle $\varepsilon > 0$ sei $N = \varepsilon^{-1/2} + 1$. Dann

$$|f_n(x) - f(x)| = |x/n^2 + x + 1 - (x+1)| = |x/n^2| \le 1/n^2 \le 1/N^2 < \varepsilon,$$

$\forall n \ge N$ und $\forall x \in [0,1]$ gilt. Sei $g_k(x) = \frac{e^{kx}}{k!}$. Dann

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{kx}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} g_k(x).$$

Wenn $\forall x \in [0,1], k \ge 1$, $|g_k(x)| \le c_k$ und $\sum_{k=1}^{+\infty} c_n$ konvergiert, impliziert Satzt 3.7.9, dass $f_n(x)$ gleichmässig gegen die punktweise Grenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^x)^k}{k!} = e^{e^x} - 1$$

konvergiert. Die Funktionfolge (g_k) erfüllt die Hypothese:

$$|g_k(x)| = \frac{(e^x)^k}{k!} \leq \frac{e^k}{k!} = c_k, \quad \forall x \in [0,1],$$

und

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = -1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^k}{k!} = e^e - 1.$$

7.6. $\star$ **Punktweise vs Gleichmässige Konvergenz** Sei (f_n) gegeben durch

$$f_n(x) = \frac{1+n^2x^2}{(1+nx)^2}, \quad x \geq 0,$$

konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionfolge punktweise gegen $f(x) = 1$ konvergiert.

Lösung: Sei $x \geq 0$ beliebig. Dann

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+n^2x^2}{(1+nx)^2} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+n^2x^2+2nx-2nx}{(1+nx)^2} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+nx)^2-2nx}{(1+nx)^2} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{2nx}{(1+nx)^2} = 1.\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass diese Konvergenz *nicht* gleichmässig ist.

Hinweis: Berechnen Sie $f_n(x) - 1$, und finden Sie $x_n \geq 0$, sodass $f_n(x_n) - 1$ nicht *gegen 0 konvergiert.*

Lösung: Es gilt

$$f_n(x) - 1 = 1 - \frac{2nx}{(1+nx)^2}.$$

Sei (x_n) durch $x_n = 1/n$ definiert. Dann

$$f_n(x_n) - 1 = 1 - \frac{2}{(1+1)^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

die nicht gegen 0 konvergiert.