8.1. ⋆ Trigonometrische Funktionen

(a) Berechnen Sie $\cos(5x)$ als Kombination von Potenzen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

Lösung: Es gilt aus Satz 3.8.2 Punkt (4), dass $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ und $\sin(z+w) = \cos(w)\sin(z) + \sin(w)\cos(z)$. Insbesondere $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$ und $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$. Dann

$$\begin{aligned}
\cos(5x) &= \cos(x + 2(2x)) = \cos(x)\cos(2(2x)) - \sin(x)\sin(2(2x)) \\
&= \cos(x)(\cos^2(2x) - \sin^2(2x)) - 2\sin(x)\sin(2x)\cos(2x) \\
&= \cos(x)\Big((\cos^2(x) - \sin^2(x))^2 - 4\sin^2(x)\cos^2(x)\Big) \\
&\quad - 4\sin(x)\sin(x)\cos(x)\Big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\Big) \\
&= \cos(x)\Big(\cos^4(x) + \sin^4(x) - 6\sin^2(x)\cos^2(x)\Big) \\
&\quad - 4\sin^2(x)\cos(x)\Big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\Big) \\
&= \cos^5(x) + 5\cos(x)\sin^4(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x).
\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie $\sin(x)^5$ als Kombination von $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ wobei $0 \le k \le 5$.

Lösung: Aus Satz 3.8.2 Punkt (3) folgt, dass

$$\begin{aligned}
\sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^5}{(2i)^5} \\
&= \frac{e^{5ix} - e^{-5ix} - 5e^{3ix} + 5e^{-3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix}}{32i} \\
&= \frac{\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)}{16}.
\end{aligned}$$

8.2. ⋆ Operationen und Grenzen

Seien f, g zwei Funktionen von $]a,b]$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta, \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$$

existieren, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ und $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ existieren.

Hinweis: Anwenden Sie das Kriterium für Grenzwerte mit Folgen.

Lösung: Aus Bemerkung 3.10.4 es folgt, dass ℓ der Grenzwert von eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ für $x \to x_0$ ist, genau dann wenn $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$ für alle Folgen $a_n \to x_0$. Sei (a_n) eine beliebige Folge in $]a,b]$, sodass $a_n \to a$. Durch Annahme ist bekannt, dass die Folgen $(f(a_n))$ und $(g(a_n))$ gegen α und β konvergieren. Aus Satz 2.1.8 (Operationen und Grenzwerten für Folgen) es folgt, dass $(f(a_n) + g(a_n))$ gegen $\alpha + \beta$ konvergiert, und $(f(a_n)g(a_n))$ gegen $\alpha\beta$ konvergiert. Da die Folge (a_n) beliebig ist, folgt die Aussage.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,$$

wenn $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ und $|f(x)| \leq |g(x)|$ für jedes $x \in]a, b]$.

Lösung: Aus Annahme

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in]a, \delta[\colon |g(x)| < \varepsilon.$$

Dann gilt das Gleiche für $f(x)$, da $|f(x)| \leq |g(x)|$ es folgt

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in]a, \delta[\colon |f(x)| < \varepsilon,$$

das heißt $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

8.3. Polynomdivision und Grenzen I Zeigen Sie, dass für alle ganze Zahl $d \geq 0$ und alle reelle Zahlen $u_0, \ldots, u_d$ Folgendes gilt:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(u_0 + \frac{u_1}{x} + \cdots + \frac{u_d}{x^d}\right) = u_0.$$

Lösung: Man soll zeigen, dass

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x > \delta : \left|\left(u_0 + \frac{u_1}{x} + \cdots + \frac{u_d}{x^d}\right) - u_0\right| < \varepsilon.$$

Sei $\delta = 1 + \frac{|u_1+\cdots+u_d|}{\varepsilon}$. Insbesondere $\delta \geq 1$ impliziert, dass $x^{-\ell} \leq x$ für alle $x > \delta$, $\ell \geq 1$. Dann gilt

$$\left|\left(u_0 + \frac{u_1}{x} + \cdots + \frac{u_d}{x^d}\right) - u_0\right| = \left|\frac{u_1}{x} + \cdots + \frac{u_d}{x^d}\right| \leq \frac{|u_1 + \cdots + u_d|}{x} < \frac{|u_1 + \cdots + u_d|}{\delta} < \varepsilon.$$

8.4. ⋆ Polynomdivision und Grenzen II Seien $d \geq 0$, $e \geq 0$ ganze Zahlen. Die reellen Polynomen $p(x)$, $q(x)$ seien gegeben durch

$$p(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$q(x) = b_e x^e + \cdots + b_1 x + b_0$$

wobei $a_d \neq 0$, $b_e \neq 0$. Sei $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = p(x)/q(x)$. Man beachte, dass D alle reellen Zahlen außer endlich vielen enthält.

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existiert, und dass Folgendes gilt

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \frac{a_d}{b_e} > 0 \text{ und } d > e, \\ -\infty, & \text{falls } \frac{a_d}{b_e} < 0 \text{ und } d > e, \\ 0, & \text{falls } d < e, \\ \frac{a_d}{b_e}, & \text{falls } d = e. \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie die gleiche Methode wie für den Grenzwert $p(n)/q(n)$ aus dem Unterricht und der vorherigen Übung.

Lösung: Für $x \in D$ man kann schreiben

$$f(x) = x^{d-e}\frac{a_d + a_{d-1}/x + \cdots + a_0/x^d}{b_e + b_{e-1}/x + \cdots + b_0/x^e} = x^{d-e}\frac{a_d}{b_e}\cdot\frac{1 + a_{d-1}/(a_d x) + \cdots + a_0/(a_d x^d)}{1 + b_{e-1}/(b_e x) + \cdots + b_0/(b_e x^e)}.$$

Seien $x_1 < x_2 < \cdots < x_s$ reelle Zahlen, sodass $D = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_s\}$. Da $x \to +\infty$, kann man davon annehmen, dass $x > x_s$.

- Fall $d = e$: Aufgabe 8.3 impliziert, dass

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{a_d}{b_e}\lim_{x\to+\infty}\frac{1 + a_{d-1}/(a_d x) + \cdots + a_0/(a_d x^d)}{1 + b_{e-1}/(b_e x) + \cdots + b_0/(b_e x^e)} = \frac{a_d}{b_e}.$$

- Fall $d < e$: Aufgabe 8.2, Aufgabe 8.3, und $x^{d-e} \to 0$ implizieren, dass

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{a_d}{b_e}\lim_{x\to+\infty} x^{d-e}\frac{1 + a_{d-1}/(a_d x) + \cdots + a_0/(a_d x^d)}{1 + b_{e-1}/(b_e x) + \cdots + b_0/(b_e x^e)} = 0.$$

- Fall $d > e$: Sei $M > 0$. Aus Aufgabe 8.3 existiert es $\delta_1 > x_s$, sodass

$$x > \delta_1 \Rightarrow \left|\frac{1 + a_{d-1}/(a_d x) + \cdots + a_0/(a_d x^d)}{1 + b_{e-1}/(b_e x) + \cdots + b_0/(b_e x^e)} - 1\right| < \frac{1}{2}.$$

  Wenn $a_d/b_e > 0$ gilt es

$$x > \delta_1 \Rightarrow f(x) > \frac{a_d}{b_e}x^{d-e}(1 - 1/2) = \frac{a_d}{2b_e}x^{d-e}.$$

  Sei $\delta := \max\{\delta_1, (2b_e M/a_d)^{1/(d-e)}\}$, dann

$$x > \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

  Dies Zeigt, dass $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Wenn $\frac{a_d}{b_e} < 0$, definiert man $\tilde{p}(x) = -p(x)$. Nach dem vorherigen Fall, Folgendes gilt

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = -\lim_{n\to+\infty}\frac{\tilde{p}(x)}{q(x)} = -\infty.$$

(b) Nehmen wir an, dass $b_0 = 0$ und $b_1 \neq 0$ sind. Insbesondere ist $q(0) = 0$, und daher $0 \notin D$. Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert, wenn $x > 0$ ist, und dass Folgendes gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \frac{a_0}{b_1} > 0, \\ -\infty, & \text{falls } \frac{a_0}{b_1} < 0, \\ \frac{a_1}{b_1}, & \text{falls } a_0 = 0. \end{cases}$$

Lösung:

- Fall $a_0 = 0$: Aufgabe 8.2 impliziert, dass

$$\begin{aligned} \frac{a_d x^d + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x}{b_e x^e + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x} &= \frac{x(a_d x^{d-1} + \cdots + a_2 x + a_1)}{x(b_e x^{e-1} + \cdots + b_2 x + b_1)} \\ &= \frac{a_d x^{d-1} + \cdots + a_2 x + a_1}{b_e x^{e-1} + \cdots + b_2 x + b_1} \to \frac{a_1}{b_1} \end{aligned}$$

  wenn $x \to 0$.

- Fall $\frac{a_0}{b_1} > 0$: Sei $0 < y_1 < \cdots < y_\ell$, sodass $D \cap (0, +\infty) = (0, +\infty) \setminus \{y_1, \ldots, y_\ell\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0}{b_e x^e + \cdots + b_1 x} = \frac{1}{x} \frac{a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0}{b_e x^{e-1} + \cdots + b_2 x + b_1} \\ &= \frac{a_0}{b_1} \frac{a_d x^{d-1}/a_0 + \cdots + a_1/a_0 + 1/x}{b_e x^{e-1}/b_1 + \cdots + b_2 x/b_1 + 1}. \end{aligned}$$

  Sei $M > 0$. Es gibt $0 < \delta_1 < y_1$, sodass

$$0 < x < \delta_1 \Rightarrow |(b_e x^{e-1}/b_1 + \cdots + b_2 x/b_1 + 1) - 1| < \frac{1}{2}.$$

  Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} &|(b_e x^{e-1}/b_1 + \cdots + b_2 x/b_1 + 1) - 1| < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < (b_e x^{e-1}/b_1 + \cdots + b_2 x/b_1 + 1) - 1 < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} < b_e x^{e-1}/b_1 + \cdots + b_2 x/b_1 + 1 < 1 + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{b_e x^{e-1}/b_1 + \cdots + b_2 x/b_1 + 1} < 2. \end{aligned}$$

  Sei $0 < \delta_2 \leq \delta_1$, sodass

$$0 < x < \delta_2 \Rightarrow |(a_d x^d/a_0 + \cdots + a_1/a_0) - a_1/a_0| < \frac{1}{2}.$$

Dann

$$0 < x < \delta_1 \Rightarrow f(x) > \frac{2a_0}{3b_1}\Big(\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x}\Big).$$

Für $\delta = \min\{\delta_2, (3b_1 M/(2a_0) - a_1/a_0 + 1/2)^{-1}\}$, Folgendes gilt

$$0 < x < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Dies Zeigt, dass $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

– Fall $\frac{a_0}{b_1} < 0$: Man definiert $\tilde{p}(x) = -p(x)$. Nach dem vorherigen Fall

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)} = -\infty.$$

8.5. Grenzwerten Bestimmen Sie den folgenden Grenzwerten.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^5 + x^3 + \cos(x) + e^{-x}}{5x^4 + 1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|\cos(x)|}{x}$$

Lösung: Es gilt für $x > 0$

$$\left|\frac{\cos(x) + e^{-x}}{5x^4 + 1}\right| = \frac{|\cos(x) + e^{-x}|}{5x^4 + 1} \le \frac{|\cos(x)| + |e^{-x}|}{5x^4 + 1} \le \frac{2}{5x^4 + 1},$$

das heißt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x) + e^{-x}}{5x^4 + 1} = 0.$$

Aufgabe 8.4 (a) impliziert, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^5 + x^3}{5x^4 + 1} = -\infty.$$

Die Kombination der beiden Ergebnisse zeigt, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^5 + x^3 + \cos(x) + e^{-x}}{5x^4 + 1} = -\infty.$$

Man zeigt, dass $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|\cos(x)|}{x} = +\infty$: Sei $M > 0$. Da $\cos(x)$ stetig ist, für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_1 > 0$, sodass

$$0 < x < \delta_1 \Rightarrow |\cos(x) - 1| < \varepsilon.$$

Insbesondere, gibt es $\delta_1 > 0$, sodass

$$0 < x < \delta_1 \Rightarrow |\cos(x) - 1| < \frac{1}{2}.$$

Das heißt $1/2 < \cos(x) < 3/2$. Dann

$$0 < x < \min\{\delta_1, M/2\} \Rightarrow \frac{|\cos(x)|}{x} = \frac{\cos(x)}{x} > \frac{1}{2x} \geq M.$$

8.6. Existenz der Grenzwerten Sei $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sin(1/x)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.

Hinweis: Finden Sie zwei Folgen (a_n), (b_n) die gegen 0 konvergieren so, dass $\lim_n f(a_n) \neq \lim_n f(b_n)$.

Lösung: Seien (a_n) und (b_n) gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{n\pi}, \quad b_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}.$$

Dann a_n und b_n gegen 0 konvergieren, aber

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin(n\pi) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0,$$

und

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin(\pi/2 + 2n\pi) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to 0} xf(x) = 0.$$

Lösung: Bemerken Sie, dass $|x \sin(1/x)| \leq |x|$, und $\lim_{x\to 0}|x| = 0$. Aus Aufgabe 8.2.(a) folgt es, dass $xf(x) \to 0$.