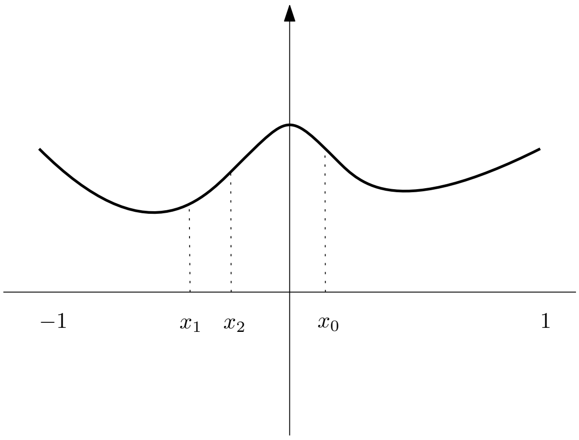
Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

**9.1. MC Fragen: Differenzierbare Funktionen** Wählen Sie die richtige Antwort.

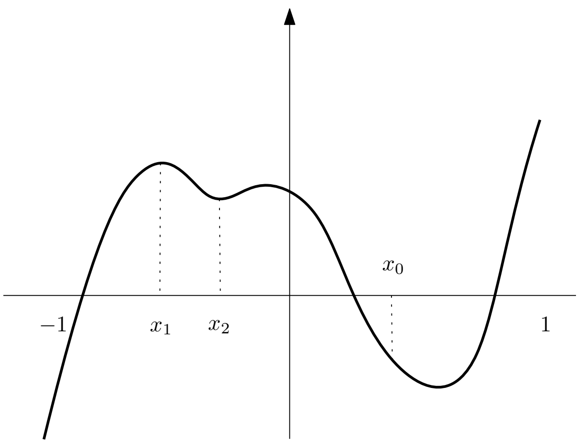
**(a)** Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgendem Graph




Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ● Die Funktion $f$ besitzt ein lokales Maximum in 0.
- ○ $f'(x_0) > 0$.
- ○ $f'(x_1) = 0$.
- ○ $f'(x_2) < 0$.

**(b)** Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgendem Graph




Welche der folgenden Aussagen gilt?

○ Die Funktion $f$ besitzt ein lokales Maximum in 0.

○ $f'(x_0) > 0$.

● $f'(x_1) = 0$.

○ $f'(x_2) < 0$.

**(c)** Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $]-1,1[$ differenzierbar ist. Nehmen wir an, dass $f'(0) = 1$ ist. Welche der folgenden Aussagen gilt?

○ $f(x) > f(0)$ für alle $0 < x < 1$. ϟ: $f(x) = x - 2x^2$.

○ Es gibt $-1 < x < y < 1$, sodass

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 1.$$

ϟ: $f(x) = x - x^3$.

○ $f(1) > f(0)$. ϟ: $f(x) = x - x^2$.

○ Es gibt $x \in [-1,0]$, sodass $f'(x) = 0$ ist. ϟ: $f(x) = x - x^2$.

**9.2. Berechnung von Ableitungen** Berechnen Sie die folgenden Ableitungen, wenn diese definiert sind.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x\log(x), \\ f_2(x) &= \exp(\exp(x) - 1), \\ f_3(x) &= \cos(\log(x^2+1)), \\ f_4(x) &= \frac{1 + x + x^2}{(2x^3+3)^2}. \end{aligned}$$

**Lösung:** Man berechnet die Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f_1'(x) &= (x\log(x))' = (x)'\log(x) + x(\log(x))' = \log(x) + x\cdot\frac{1}{x} = \log(x)+1.\\
f_2'(x) &= (\exp(\exp(x)-1))' = \exp'(\exp(x)-1)\cdot(\exp(x)-1)'\\
&= \exp(\exp(x)-1)\exp(x).\\
f_3'(x) &= (\cos(\log(x^2+1)))' = \cos'(\log(x^2+1))\cdot(\log(x^2+1))'\\
&= -\sin(\log(x^2+1))\log'(x^2+1)\cdot(x^2+1)' = -\sin(\log(x^2+1))\frac{2x}{x^2+1}\\
f_4'(x) &= \left(\frac{1+x+x^2}{(2x^3+3)^2}\right)' = \frac{(1+x+x^2)'(2x^3+3)^2-(1+x+x^2)((2x^3+3)^2)'}{(2x^3+3)^4}\\
&= \frac{(1+2x)(2x^3+3)^2-2(1+x+x^2)(2x^3+3)\cdot 6x^2}{(2x^3+3)^4}\\
&= \frac{(1+2x)(2x^3+3)-12x^2(1+x+x^2)}{(2x^3+3)^3}\\
&= \frac{3+6x-12x^2-10x^3-8x^4}{(2x^3+3)^3}.
\end{aligned}
$$

**9.3. ⋆ Hyperbelfunktionen** Seien $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$ und $g(x) = (e^x - e^{-x})/2$ zwei Funktionen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert sind.

**(a)** Zeigen Sie, dass $f$ und $g$ differenzierbar in $\mathbb{R}$ sind, und dass Folgendes gilt:

$$f' = g, \quad g' = f.$$

**Lösung:** Die Funktionen $e^x$ und $e^{-x}$ sind differenzierbar in $\mathbb{R}$. Linearkombinationen von differenzierbaren Funktionen sind differenzierbar, und daher sind $f$ und $g$ differenzierbar. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= ((e^x+e^{-x})/2)' = (e^x + e^{-x}(-1))/2 = g(x),\\
g'(x) &= ((e^x-e^{-x})/2)' = (e^x - e^{-x}(-1))/2 = f(x).
\end{aligned}
$$

**(b)** Zeigen Sie, dass $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Lösung:** Aus Punkt (a) gilt es

$$(f(x)^2 - g(x)^2)' = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0.$$

Das heißt $f(x)^2 - g(x)^2$ konstant ist, und daher $f(x)^2 - g(x)^2 = f(0)^2 - g(0)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**(c)** Zeigen Sie, dass $g$ strikt monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.

**Lösung:** Aus Punkt (a) folgt, dass

$$g'(x) = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > \frac{e^x}{2} > 0,$$

da $e^y > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ist. Die Aussage folgt aus Korollar 4.2.5, Punkt (4).

**(d)** Zeigen Sie, dass Folgendes gilt

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

**Lösung:** Es gilt

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty,$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y} - e^{-(-y)}}{2} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{2} = -\infty.$$

**(e)** Folgern, dass $g$ eine Bijektion ist, und dass $g^{-1}$ differenzierbar mit Ableitung

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist.

**Lösung:** Punkten (c) und (d), und Korollar 4.1.12 implizieren, dass $g$ eine differenzierbar Bijektion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist. Man berechnet

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{f(g^{-1}(x))}.$$

Aus Punkt (b) folgt es, dass $f(x) = \sqrt{1 + g(x)^2}$, wobei

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + g(g^{-1}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

**(f)** Zeigen Sie, dass $g(x) > 0$ wenn $x > 0$ und $g(x) < 0$ wenn $x < 0$ ist.

**Lösung:** Die Funktion $g$ ist *strikt* monoton wachsend, und $g(0) = 0$. Insbesondere gilt es, dass $g(x) < g(0) = 0$ wenn $x < 0$ und $0 = g(0) < g(x)$ wenn $x > 0$.

**(g)** Zeigen Sie, dass $f$ strikt monoton fallend auf $]-\infty, 0]$ und strikt monoton wachsend auf $[0, +\infty[$ ist.

**Lösung:** Kombinieren Sie die Punkte (a) und (f), um das Vorzeichen der Ableitung $f'(x)$ zu bestimmen.

**(h)** Sei $f_1$ die Einschränkung der Funktion $f$ auf $[0, +\infty[$. Zeigen Sie, dass $f_1$ eine Bijektion von $[0, +\infty[$ nach $[1, +\infty[$ ist.

**Lösung:** Es gilt

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty,$$

und $f(0) = 1$. Dann, Punkt (g) impliziert, dass $f_1$ eine Bijektion von $[0, +\infty[$ nach $[1, +\infty[$ ist.

**(i)** Zeigen Sie, dass $f_1^{-1}$ differenzierbar auf $]1, +\infty[$ ist, und dass

$$(f_1^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

für alle $x > 0$.

**Lösung:** Auf Korollar 4.1.12 $f_1$ ist differenzierbar in $]0, +\infty[$ (Achtung, dies gilt nicht in 0, wo $f'(0) = 0$). Dann

$$(f_1^{-1})'(x) = \frac{1}{f_1'(f_1^{-1}(x))} = \frac{1}{g(f_1^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{f(f_1^{-1}(x))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

da

$$g(y) = \begin{cases} \sqrt{f(y)^2 - 1}, & \text{falls } y > 0, \\ -\sqrt{f(y)^2 - 1}, & \text{falls } y \leq 0. \end{cases}$$