Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

10.1. MC Fragen: Glatte Funktionen und Extreme Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sodass

$$f(1/2) = 2, \quad f'(1/2) = 0, \quad f''(1/2) = -1.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ● Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in $1/2$.
- ○ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in $1/2$. ϟ: $f(x) = -x^2 + x + 7/4$.
- ○ Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in $1/2$. ϟ: $f(x) = -x^2 + x + 7/4$.
- ○ Alle oben genannten Fälle sind möglich. ϟ: Aus Korollar 4.4.8: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ lokales Maximum.

(b) Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sodass

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ○ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.
- ○ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in 0.
- ● Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in 0.
- ○ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

(c) Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sodass

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ○ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0. ✓wenn: $f(x) = -x^4/4 + 2$
- ○ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in 0. ✓wenn: $f(x) = x^4/4 + 2$
- ○ Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in 0. ✓wenn: $f(x) = -x^4/4 + x^5 + 2$
- ● Alle oben genannten Fälle sind möglich.

10.2. $\star$ **Funktionsanalyse** Sei $f(x) = x\exp(1/x^2)$ für $x \in]0,+\infty[$.

(a) Zeigen Sie, das f glatt in $]0,+\infty[$ ist.

Lösung: Da $f_1 : x \mapsto \exp(x)$, $f_2 : x \mapsto x$ und $f_3 : x \mapsto 1/x^2$ glatte Funktionen in $]0,+\infty[$ sind, folgt aus Sätze 4.3.3-4.3.5-4.3.6, dass $f(x) = f_2(x)f_1(f_3(x))$ glatt in $]0,+\infty[$ ist.

(b) Finde alle möglichen Punkte x_0, in denen f ein lokales Extremum haben könnte.

Lösung: Man soll $f'(x_0) = 0$ lösen. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x\exp(1/x^2))' = x(\exp(1/x^2))' + (x)'\exp(1/x^2) \\ &= x\exp'(1/x^2)(1/x^2)' + \exp(1/x^2) = \exp(1/x^2)(1-2/x^2). \end{aligned}$$

Da $\exp(1/x^2) > 0$ für alle $x > 0$ ist, folgt $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2/x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{2}$. Da f nur für $x > 0$ definiert ist, $x_0 = \sqrt{2}$.

(c) Bestimmen Sie, ob x_0, die gefunden wurden, ein lokales Extremum sind oder nicht. Wenn ja, bestimmen Sie, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

Lösung: Zur Anwendung von Korollar 4.4.8, müssen wir das Vorzeichen der zweiten Ableitung in $x_0 = \sqrt{2}$ überprüfen. Es gilt

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\exp(1/x^2)(1-2/x^2))' \\ &= -2\exp(1/x^2)(1-2/x^2)/x^3 + 4\exp(1/x^2)/x^3, \end{aligned}$$

dann folgt

$$f''(\sqrt{2}) = 4\exp(1/2)/2^{3/2} > 0.$$

Nach Korollar 4.4.8, $f'(\sqrt{2}) = 0$, $f''(\sqrt{2}) > 0$ impliziert, dass f ein lokales Minimum in $x_0 = \sqrt{2}$ besitzt.

10.3. Grenzwerte I Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2) - \cos(x)}{\sin(x^2 - x)},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{x^2 - \sin(x)}.$$

Lösung: Da

$$\lim_{x\to 0}(\exp(x^2) - \cos(x)) = 1 - 1 = 0,$$

und

$$\lim_{x\to 0} \sin(x^2 - x) = \sin(0) = 0,$$

man kann l'Hospital Regel anwenden:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2) - \cos(x)}{\sin(x^2 - x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\exp(x^2) - \cos(x))'}{(\sin(x^2 - x))'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x\exp(x^2) + \sin(x)}{\cos(x^2 - x)(2x - 1)} = \frac{0}{-1} = 0.\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise

$$\lim_{x\to 0}(e^{3x} - e^{-x}) = \lim_{x\to 0}(x^2 - \sin(x)) = 0,$$

impliziert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{x^2 - \sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{(e^{3x} - e^{-x})'}{(x^2 - \sin(x))'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x} + e^{-x}}{2x - \cos(x)} = \frac{3+1}{-1} = -4.\end{aligned}$$

10.4. $\star$ **Grenzwerte II** Seien $f(x) = 2/x + \cos(1/x)$ und $g(x) = 1/x$ zwei Funktionen, die in $x > 0$ definiert sind.

(a) Zeigen Sie, dass Folgendes gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 2.$$

Lösung: Es gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2/x + \cos(1/x)}{1/x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(2 + x\cos(1/x)) = 2.$$

Tatsächlich gilt es $x\cos(1/x) \to 0$, weil $|x\cos(1/x)| = |x||\cos(1/x)| \leq |x| \to 0$ (Aufgabe 8.2 (b)).

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert nicht.

Lösung: Man berechnet

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-2/x^2 + \sin(1/x)/x^2}{-1/x^2} = 2 - \sin(1/x), \quad x > 0.$$

Aus Aufgabe 8.4 wissen wir, dass $\lim_{x\to 0, x>0} \sin(1/x)$ existiert nicht.

(c) Warum widerspricht Punkt (b) nicht die Regel von l'Hospital und Punkt (a)?

Lösung: Für die Anwendung des Satzes 4.2.10 ist es notwendig, dass der Grenzwert $\lim_{x\to b^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert!

10.5. Polarkoordinaten Sei z eine komplexe Zahl ungleich Null. Zeigen Sie, dass es einen einzigen Wert $t \in [0, 2\pi[$ gibt, sodass

$$z = |z|e^{it}.$$

Lösung: Sei $w := \frac{z}{|z|}$. Dann ist w eine wohldefinierte komplexe Zahl, weil $|z| \neq 0$ ist. Außerdem gilt, dass $|w| = \frac{|z|}{|z|} = 1$, das heißt $w = x + iy$ gehört zum Einheitskreis. Insbesondere gilt es, dass

$$t = \begin{cases} \arccos(x), & \text{falls } y > 0, \\ 2\pi - \arccos(x), & \text{falls } y \leq 0, \end{cases}$$

ist der einzige Wert, sodass $w = e^{it}$. Damit ist das Argument abgeschlossen, da

$$w = e^{it} \Leftrightarrow \frac{z}{|z|} = e^{it} \Leftrightarrow z = |z|e^{it}$$

gilt.

10.6. Potenzreihen Sei $f(x) = \exp(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass es Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass f in der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

Lösung: Da

$$\exp(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!},$$

folgt, dass

$$\exp(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

wobei

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ \frac{1}{(n/2)!}, & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

(b) Ableiten, ohne explizit die Ableitungen zu berechnen, dass

$$f^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{falls } j \text{ ungerade ist,} \\ \frac{j!}{(j/2)!}, & \text{falls } j \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Lösung: Nach Korollar 4.4.3 gilt es

$$f^{(j)}(x) = \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{n!}{(n-j)!} a_n x^{n-1}.$$

Insbesondere

$$f^{(j)}(0) = j! a_j.$$

10.7. Youngsche Ungleichung Sei $p > 1$ eine reelle Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass eine einzige Zahl $q > 1$ gibt, sodass $1/p + 1/q = 1$.

Lösung:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Leftrightarrow q = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{-1} = \frac{p}{p-1} > 1.$$

(b) Beweisen Sie, dass es

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

für alle $x \geq 0$ und $y \geq 0$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie die Konvexität der Funktion $-\log(x)$ in geeigneter Weise.

Lösung: Wenn $x = 0$ oder/und $y = 0$, die Gleichung ist klar. Wir prüfen die Gleichung für $x > 0$ und $y > 0$. Es sei daran erinnert, dass $f(x) = -\log(x)$ konvex in $x \in]0, +\infty[$ ist:

$$(-\log(x))'' = (-1/x)' = 1/x^2 > 0.$$

Das heißt:

$$f(\lambda_1 z + \lambda_2 w) \leq \lambda_1 f(z) + \lambda_2 f(w), \quad \forall z, w > 0, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Insbesondere, wenn $\lambda_1 = 1/p$, $\lambda_2 = 1/q$, $z = x^q$, und $w = y^q$ sind, gilt es

$$-\log(x^p/p + y^q/q) \leq -\log(x^p)/p - \log(y^q)/q = -\log(x) - \log(y).$$

Es gilt

$$xy = \exp(\log(x) + \log(y)) \leq \exp(\log(x^p/p + y^q/q)) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

da exp monoton wachsend ist.