Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

11.1. MC Fragen Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion $f(x) = x\log(x)^4$ in $x = 1$?

- ○ 0
- ● $(x-1)^4$
- ○ $(x-1)^3$
- ○ $(x-1)^2$

(b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ● f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar.
- ○ f integrierbar ($\Rightarrow$ ϟ: $f(x) = |x|$) f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig.
- ○ f stetig ($\Rightarrow$ ϟ: $f(x) = |x|$) f differenzierbar $\Rightarrow$ f integrierbar.
- ○ Nichts davon ist richtig.

(c) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir nehmen an, dass $f(x) \leq 3$ für alle $x \in [0,1]$ ist. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ○ $\int_0^1 f(x)\,dx \geq 0$. ϟ: $f(x) = -1$.
- ○ $\int_0^{1/2} f(x)\,dx \leq 1$. ϟ: $f(x) = 3$.
- ● $\int_0^t f(x)\,dx \leq 3t$ für alle $t \in [0,1]$.

  Lösung: $\int_0^t f(x)\,dx \leq \int_0^t 3\,dx = [3x]_0^t = 3t$.

11.2. Taylorpolynom Berechnen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 3 in $x = 0$ der Funktion

$$f(x) = \log(1 + x^2).$$

Lösung: Man soll berechnen $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \log(1) = 0,\\
f'(0) &= \frac{2x}{1+x^2}\Big|_{x=0} = 0,\\
f''(0) &= \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}\Big|_{x=0} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\Big|_{x=0} = 2,\\
f^{(3)}(0) &= 2\frac{-2x(1+x^2)^2-4x(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^4}\Big|_{x=0} = 0.
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom der Ordnung 3 der Funktion $\log(1+x^2)$ ist gegeben durch

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 = x^2.$$

11.3. Höhere Ableitungen I Sei $f(x) = \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Erklären Sie, warum f eine glatte Funktion ist.

Lösung: Aus Korollar 4.1.12. ist $\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$ differenzierbar. Nach Beispiel 4.2.6. Punkt (3) ist die Ableitug von f stetig und gegeben durch

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Da $1+x^2$ eine glatte Funktion ungleich null ist, nach Satz 4.3.5. ist $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$ glatt, und daher ist $\arctan(x)$ glatt.

(b) Berechnen Sie f', f'' und prüfen Sie, dass

$$f^{(3)}(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

ist.

Lösung: Es gilt aus Beispiel 4.2.6. Punkt (3)

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dann,

$$\begin{aligned}
\arctan''(x) &= \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},\\
\arctan^{(3)}(x) &= \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)' = -\frac{2(1+x^2)^2-8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = -\frac{2+2x^2-8x^2}{(1+x^2)^3}\\
&= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.
\end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie $f^{(4)}(x)$ und seine Nullstellen, um die Extremalstellen von $f^{(3)}$ in $[-10, 10]$ zu bestimmen. Folgern, dass

$$|f^{(3)}(x)| \leq 2$$

für alle $x \in [-10, 10]$.

Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned}\arctan^{(4)}(x) &= \left(\frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}\right)' = \frac{12x(1+x^2)^3 - 6x(6x^2-2)(1+x^2)^2}{(1+x^2)^6} \\ &= \frac{12x + 12x^3 - 36x^3 + 12x}{(1+x^2)^4} = \frac{-24x^3 + 24x}{(1+x^2)^4} = 24\frac{x - x^3}{(1+x^2)^4}.\end{aligned}$$

Dann

$$f^{(4)}(x) = 0 \Leftrightarrow x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}.$$

Wir bemerken, dass $f^{(4)}(x) > 0$ falls $x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[$ und $f^{(4)}(x) < 0$ falls $x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[$. Das bedeuted, dass $x = 0$ ein (lokales) Minimun, und $x \in \{-1, 1\}$ globale Maximum sind. Da

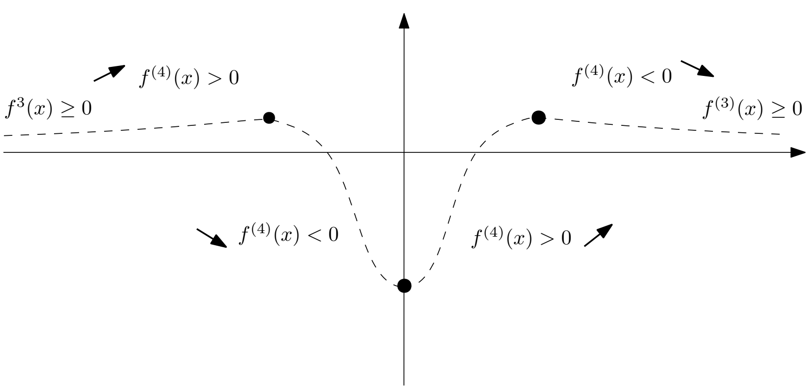
$$f^{(3)}(0) = -2, \quad f^{(3)}(-1) = f^{(3)}(1) = 1/2,$$

und

$$f^{(3)}(x) \geq 0, \quad |x| \geq \frac{1}{2},$$

ist $x = 2$ ein globales minimum. Dann, $-2 = f^{(3)}(2) \leq f^{(3)}(x) \leq f^{(3)}(1) = 1/2 \Rightarrow |f^{(3)}(x)| \leq 2$.

Der graph der Funktion $f^{(3)}(x)$



(d) Bestimmen Sie eine rationale Zahl c, sodass $|f(1/2) - c| < 1/10$ von $f^{(3)}(x)$. *Hinweise: Verwenden Sie die Taylor-Approximation der zweiten Ordnung in* $x = 0$.

Lösung: Nach Punkt (a), ist f glatt. Das Taylor-Approximation der zweiten Ordnung lautet wie folgt (Korollar 4.4.6.): für alle $x \in [-10, 10]$ gibt es ξ in $[-|x|, |x|]$, sodass

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}x^3.$$

Nach Punkt (b) man kann berechnen:

$$f(x) = x + \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}x^3.$$

Sei $c = \frac{1}{2}$. Nach Punkt (c) folgt, dass

$$|f(1/2) - 1/2| = |1/2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(1/2)^3 - 1/2| = \frac{|f^{(3)}(\xi)|}{6 \cdot 2^3} \leq \frac{1}{24} < \frac{1}{10}.$$

11.4. $\star$ Höhere Ableitungen II Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir nehmen an, dass eine reelle Zahl $M \geq 0$ gibt, sodass

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

für alle $n \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist.

(a) Für $n \geq 0$ definieren wir

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Zeigen Sie, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

Lösung: Für alle $k \geq 0$ gilt es

$$\left|\sum_{n=0}^{k} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{k} |a_n||x|^n = \sum_{n=0}^{k} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}|x|^n \leq M \sum_{n=0}^{k} \frac{|x|^n}{n!} \leq Me^{|x|}.$$

Es folgt, dass die Reihe absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \geq 0$ zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{k} a_n x^n \right| \leq \frac{M|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Lösung: Dies ist eine Folge des Taylor-Approximations (Satz 4.4.5): es gibt $\xi \in [-|x|, |x|]$, sodass

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{k} a_n x^n \right| = \left| \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} x^{k+1} \right| \leq \frac{M|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

(c) Ableiten Sie, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung: Nach Punkt (c), für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt es

$$\lim_{k \to +\infty} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{k} a_n x^n \right| \leq \lim_{k \to +\infty} \frac{M|x|^{k+1}}{(k+1)!} = 0.$$

Dies zeigt, dass $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$ ist.

(d) Nennen Sie ein Beispiel für eine Funktion ungleich Null, die die Annahme für einige $M \geq 0$ erfüllt.

Lösung: $f(x) = \cos(x)$ oder $f(x) = \sin(x)$ mit $M = 1$.

11.5. Gleichmässige Stetigkeit Sei $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

$$f(n + 1/n) - f(n)$$

und folgern, dass f *nicht* gleichmässig stetig ist.

Lösung: Es gilt

$$f(n + 1/n) - f(n) = (n + 1/n)^2 - n^2 = n^2 + 2 + 1/n - n^2 = 2 + 1/n.$$

Für alle $\delta > 0$, sei $n \in \mathbb{N}$, sodass $1/n < \delta$. Seien $x = n + 1/n$ und $y = n$. Es folgt, dass

$$|x - y| = \frac{1}{n} < \delta, \quad |f(x) - f(y)| = |2 + 1/n| > 2.$$

Deshalb ist die Funktion f nicht gleichmässig stetig.

11.6. Stammfunktionen Bestimmen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

$$f(x) = \log(x),$$
$$f(x) = x^3 - 2x + 1,$$
$$f(x) = x\exp(x^2).$$

Hinweise: Für den ersten Fall kann man mit der Berechnung der Ableitung von $x\log(x)$ *beginnen.*

Lösung: Man berechnet

$$(x\log(x))' = (x)'\log(x) + x(\log(x))' = \log(x) + 1.$$

Da $(x)' = 1$ folgt, dass

$$\log(x) = (x\log(x))' - 1 = (x\log(x) - x)'.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Stammfunktion von x^n

$$\frac{x^{n+1}}{n} + \text{Konstante}.$$

Es folgt, dass $x^3 - 2x + 1$

$$x^3 - 2x + 1 = \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + x\right)'.$$

Da $(\exp(x^2))' = 2x\exp(x^2)$, gilt es

$$x\exp(x^2) = \left(\frac{e^{x^2}}{2}\right)'.$$

11.7. Integrale Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$\int_2^3 (x-1)^4\,dx$$
$$\int_3^4 e^x\,dx.$$

Lösung: Es gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)\Big|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Die Stammfunktion der Funktion $(x-1)^4$ ist $(x-1)^5/5$, und daher

$$\int_2^3 (x-1)^4\,dx = \frac{(x-1)^5}{5}\Big|_2^3 = \frac{31}{5}.$$

Die Stammfunktion von e^x ist e^x, und

$$\int_3^4 e^x\,dx = e^x\Big|_3^4 = e^4 - e^3.$$