Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

12.1. MC Fragen Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Welche der folgenden Gleichungen ist richtig?

○ $\int f(x^2)\,dx = 2\int f(y)\,dy$

● $\int xf(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int f(y)\,dy$

○ $\int f(x^2)\,dx = 2\int yf(y)\,dy$

(b) Welche der folgenden Gleichungen ist richtig?

○ $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g'(x)\,dx$

○ $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) + \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$

● $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

12.2. Partielle Integration Berechnen Sie

$$\int_a^b \log(x)\,dx$$

durch Partielle Integration, für alle $a, b > 0$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b \log(x)\,dx = \int_a^b 1\cdot\log(x)\,dx = \int_a^b (x)'\log(x)\,dx \\
&= x\log(x)\Big|_a^b - \int_a^b x(\log(x))'\,dx \\
&= b\log(b) - a\log(a) - \int_a^b x\frac{1}{x}\,dx \\
&= b\log(b) - a\log(a) - \int_a^b 1\,dx \\
&= b\log(b) - a\log(a) - (b-a) \\
&= b(\log(b)-1) - a(\log(a)-1).
\end{aligned}$$

12.3. Berechnung von Integralen Berechnen Sie die folgenden Integralen:

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$$

$$\int_0^1 t\tan(t^2) dt$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos(2t)^3 dt$$

Lösung: Da $(x^2+x+1)' = 2x+1$ ist, folgt daraus, dass

$$\log(x^2+x+1)' = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Dann

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \log(x^2+x+1)\Big|_0^1 = \log(3) - \log(1) = \log(3).$$

Aus Satz 5.4.6 (Substitution) $y = t^2$, gilt es

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\tan(t^2)\, dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 \tan(y)\, dy = -\frac{1}{2}\log(\cos(x))\Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}(\log(\cos(1)) - \log(\cos(0))) = \frac{-\log(\cos(1))}{2}.\end{aligned}$$

Aus Satz 5.4.6 (Substitution) $y = 2t$, gilt es

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \cos(2t)^3\, dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(y)^3\, dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(y)\cos(y)^2\, dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(y)(1-\sin^2(y))\, dy \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sin(y)|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2(y)\cos(y)\, dy\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{3}\sin^3(y)|_0^{\pi/2}\Big) = \frac{1}{2}(1-1/3) = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

In der dritte Gleichung haben wir $\sin(y)^2 + \cos(y)^2 = 1$ verwendet.

12.4. Stammfunktionen Bestimmen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = \frac{1}{x\log(x)}, \quad x > 1$$

$$f_2(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}, \quad x > 3$$

$$f_3(x) = x^3 e^{x^2}.$$

Hinweis: Finden Sie für die zweite Aufgabe die reellen Zahlen a, b, c so, dass

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}.$$

Lösung: Da

$$\frac{1}{x\log(x)} = \frac{(\log(x))'}{\log(x)}$$

ist, folgt daraus, dass

$$(\log(\log(x)))' = \frac{1}{x\log(x)}.$$

Folgen wir dem gegebenen Hinweis:

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3} &= \frac{(a+b+c)x^2 - (5a+4b+3c)x + 6a+3b+2c}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0, \\ 5a+4b+3c=0 \\ 6a+3b+2c=1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a=c=\frac{1}{2}, b=-1.\end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2(x-3)}\right) \\ &= \frac{\log(x-1) - 2\log(x-2) + \log(x-3)}{2} + \text{konstant}.\end{aligned}$$

Für den letzten Punkt gilt es, dass

$$\begin{aligned}\int_0^x t^3 e^{t^2}\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^x t^2 (e^{t^2})'\,dt = \frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - 2\int_0^x t e^{t^2}\,dt\right) = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x (e^{t^2})'\,dt \\ &= \frac{x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + 1}{2} = \frac{e^{x^2}(x^2-1)+1}{2}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{e^{x^2}(x^2-1)}{2}\right)' = x^3 e^{x^2}.$$

12.5. $\star$ **Integration und Frequenzen** Seien $a > 0$, $b \geq 0$ reelle Zahlen, $a \neq b$. Die Funktionen $C(x)$ und $S(x)$ seien definiert durch

$$C(x) = \int_0^x \cos(at)\cos(bt)\,dt, \qquad S(x) = \int_0^x \sin(at)\sin(bt)\,dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass Folgendes gilt

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{a}\sin(ax)\cos(bx) + \frac{b}{a}S(x) \\ S(x) &= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(bx) + \frac{b}{a}C(x). \end{aligned}$$

Lösung: Durch Partielle Integration gilt es, dass

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x \cos(at)\cos(bt)\,dt = \int_0^t \left(\frac{\sin(at)}{a}\right)' \cos(bt)\,dt \\ &= \frac{1}{a}\sin(at)\cos(bt)\Big|_0^x - \frac{1}{a}\int_0^x \sin(at)\Big(-b\sin(bt)\Big)\,dt \\ &= \frac{1}{a}\sin(ax)\cos(bx) + \frac{b}{a}S(x). \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x \sin(at)\sin(bt)\,dt = \int_0^t \left(-\frac{\cos(at)}{a}\right)' \sin(bt)\,dt \\ &= -\frac{1}{a}\cos(at)\sin(bt)\Big|_0^x + \frac{1}{a}\int_0^x \cos(at)\Big(b\cos(bt)\Big)\,dt \\ &= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(bx) + \frac{b}{a}C(x). \end{aligned}$$

(b) Ableiten von (a) elementaren Formeln für $C(x)$ und $S(x)$.

Lösung: Aus Punkt (a) gilt es:

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{a}\sin(ax)\cos(bx) + \frac{b}{a}S(x) \\ &= \frac{1}{a}\sin(ax)\cos(bx) + \frac{b}{a}\Big(-\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(bx) + \frac{b}{a}C(x)\Big) \\ &= \frac{1}{a}\sin(ax)\cos(bx) - \frac{b}{a^2}\cos(ax)\sin(bx) + \frac{b^2}{a^2}C(x), \end{aligned}$$

Dann, aus

$$\Big(1-\frac{b^2}{a^2}\Big)C(x)=\frac{1}{a}\sin(ax)\cos(bx)-\frac{b}{a^2}\cos(ax)\sin(bx),$$

folgt, dass

$$\begin{aligned}C(x)&=\Big(1-\frac{b^2}{a^2}\Big)^{-1}\Big(\frac{1}{a}\sin(ax)\cos(bx)-\frac{b}{a^2}\cos(ax)\sin(bx)\Big)\\&=\frac{1}{a^2-b^2}\Big(a\sin(ax)\cos(bx)-b\cos(ax)\sin(bx)\Big).\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise

$$\begin{aligned}S(x)&=\Big(1-\frac{b^2}{a^2}\Big)^{-1}\Big(-\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(bx)+\frac{b}{a^2}\sin(ax)\cos(bx)\Big)\\&=\frac{1}{a^2-b^2}\Big(-a\cos(ax)\sin(bx)+b\sin(ax)\cos(bx)\Big).\end{aligned}$$

(c) Folgern, dass wenn $a\in\mathbb{N}$ und $b\in\mathbb{N}$, dann

$$\int_0^{2\pi}\cos(ax)\cos(bx)dx=0$$

es sei denn $a=b$, und dass

$$\int_0^{2\pi}\cos(ax)\cos(bx)dx=\begin{cases}\pi & \text{falls } a=b\neq 0\\ 2\pi & \text{falls } a=b=0.\end{cases}$$

Lösung: Wenn $a\neq b$, aus Punkt (b) folgt daraus, dass

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos(ax)\cos(bx)\,dx&=C(2\pi)\\&=\frac{1}{a^2-b^2}\Big(a\underbrace{\sin(2\pi a)}_{=0}\cos(2\pi b)-b\cos(2\pi a)\underbrace{\sin(2\pi b)}_{=0}\Big)\\&=0.\end{aligned}$$

Wenn $a=b=0$:

$$\int_0^{2\pi}\cos(0)\cos(0)\,dx=\int_0^{2\pi}1\,dx=2\pi,$$

und wenn $a=b\neq 0$ berechnen wir

$$\int_0^{2\pi}\cos(ax)^2\,dx=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2ax)}{2}\,dx=\pi+\frac{\sin(2ax)}{4a}\bigg|_0^{2\pi}=\pi.$$

(d) Sei $d \geq 0$ eine ganze Zahl und seien $a_0, \ldots, a_d$ reelle Zahlen. Sei f die Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + \cdots + a_d \cos(dx).$$

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \end{aligned}$$

für $1 \leq n \leq d$.

Lösung: Sei $n \in \{0, \ldots, d\}$. Durch die Linearität des Integrals folgt, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{d} \int_0^{2\pi} a_k \cos(kx) \cos(nx)\, dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx)\, dx \right). \end{aligned}$$

Aus Punkt (c)

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq n, \\ 2\pi, & \text{falls } k = n \neq 0, \\ \pi, & \text{falls } k = n = 0. \end{cases}$$

und daher

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{d} a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx)\, dx = \begin{cases} a_n, & \text{falls } n \neq 0, \\ \pi \frac{a_0}{2}, & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$