Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

13.1. MC Fragen Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Welche Substitution ist am besten geeignet, um das folgende Integral zu berechnen?

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}\,dx$$

- ● $y = \sin(x)$
- ○ $y = \cos(x)$
- ○ $y = 1 + \sin(x)^2$
- ○ Keine dieser Substitutionen vereinfacht das Integral.

Lösung: Sei $y = \sin(x)$. Es gilt dann

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}\,dx = \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \arctan(y) = \arctan(\sin(x)).$$

(b) Welche Substitution ist am besten geeignet, um das folgende Integral zu berechnen?

$$\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)^2}\,dx$$

- ○ $y = \sin(x)$
- ● $y = \cos(x)$
- ○ $y = 1 + \sin(x)^2$
- ○ Keine dieser Substitutionen vereinfacht das Integral.

Lösung: Sei $y = \cos(x)$. Es gilt dann

$$\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)^2}\,dx = -\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = -\arctan(\cos(x)).$$

(c) Welche Substitution ist am besten geeignet, um das folgende Integral zu berechnen?

$$\int \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)^7}\,dx$$

- ○ $y = \sin(x)$
- ● $y = \cos(x)$
- ○ $y = \sin(x)^7$
- ○ Keine dieser Substitutionen vereinfacht das Integral.

Lösung: Sei $y = \sin(x)$. Es gilt dann

$$\int \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)^7}\,dx = \int \frac{\cos^2(x)}{y^7}\,dy = \int \frac{1-y^2}{y^7}\,dy = \frac{3y^2-2}{12y^6} = \frac{3\sin(x)^2-2}{12\sin(x)^6}.$$

13.2. Stammfunktionen Bestimmen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}, \qquad g(x) = \frac{1}{1+2x-x^2}.$$

Lösung: Durch Subtitution $\sqrt{3}y/2 = x + 1/2$ folgt daraus

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{1+y^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(y) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big).\end{aligned}$$

Durch Subtitution $\sqrt{2}y = x - 1$ folgt daraus

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+2x-x^2}\,dx &= -\int \frac{1}{(x-1)^2-2}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{y^2-1}\,dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}\Big(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\Big).\end{aligned}$$

13.3. Uneigentlichen Integralen I Zeigen Sie, dass die folgenden uneigentlichen Integrale existieren.

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{x}} dx$$

Hinweis: Für das erste Integral kann man verwenden, dass die Funktion $x^3e^{-x/2}$ *in* $[0,+\infty[$ *begrenzt ist.*

Lösung: Sei $M > 0$, sodass $x^3e^{-x/2} \leq M$ für alle $x \in [0,+\infty[$. Aus Lemma 5.8.3 konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx$$

da $|x^3e^{-x}| \leq Me^{-x/2}$ und $e^{-x/2}$ integrierbar in $[0,+\infty[$ ist:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x/2}\,dx = -\lim_{b\to+\infty} 2(e^{-b/2}-1) = 2.$$

Für $x \geq 1$ gilt es

$$\frac{x^2+1}{x^4+2} \leq \frac{x^2+1}{x^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \leq \frac{2}{x^2}.$$

Aus Lemma 5.8.3 genügt es zu zeigen, dass $f(x) = 2/x^2$ integrierbar in $[1,+\infty[$ ist:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{2}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{2}{b}+2\right) = 2.$$

Es folgt, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+2}dx$$

konvergent ist. Endlich konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{x}}dx,$$

weil

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left|\int_\varepsilon^1 \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{x}}\,dx\right| \leq \lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0}(2-2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

13.4. Uneigentlichen Integralen II Sei $f(x) = x\log(x)$, $x > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 0} x^2\log(x) = 0$ ist.

Lösung: Aus l'Hospital Regel, folgt

$$\lim_{x\to 0} x^2\log(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x}\frac{x^3}{2} = 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral der Funktion $f(x)$ in $[0,1]$ existiert, und dass

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{1}{4}$$

gilt.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Aus partielle Integration gilt es

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 x\log(x)\,dx = \int_\varepsilon^1 x(x\log(x)-x)'\,dx &= x^2(\log(x)-1)\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x\log(x) - x\,dx\\ &= -1-\varepsilon^2(\log(\varepsilon)-1) - \int_\varepsilon^1 x\log(x)\,dx + \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}\end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$2\int_\varepsilon^1 x\log(x)\,dx = -\frac{1}{2} - \varepsilon^2(\log(\varepsilon)-1).$$

Aus Punkt (a) man kann der Grenzwert

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x\log(x)\,dx = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(-\frac{1}{2} - \varepsilon^2(\log(\varepsilon)-1)\Big) = -\frac{1}{4}$$

berechnen.

13.5. Uneigentlichen Integralen III

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_1^x \cos(\pi t^2)dt = \frac{\sin(\pi x^2)}{2\pi x} + \frac{1}{4\pi}\int_1^{x^2}\frac{\sin(\pi y)}{y^{3/2}}dy$$

für alle $x \geq 1$.

Hinweis: Man kann eine partielle Integration nach eine Substitution verwenden.

Lösung: Nach der Substitution $t^2 = y$ folgt, dass

$$\int_1^x \cos(\pi t^2)\, dt = \int_1^{x^2} \frac{\cos(\pi y)}{2y}\, dy,$$

und nach der partiellen Integration (Satz 5.4.5) mit $f(y) = \frac{1}{2y}$ und $g'(y) = \cos(\pi t^2)$ schliessen wir, dass

$$\int_1^x \cos(\pi t^2) dt = \frac{\sin(\pi x^2)}{2\pi x} + \frac{1}{4\pi} \int_1^{x^2} \frac{\sin(\pi y)}{y^{3/2}} dy.$$

(b) Folgern, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^{+\infty} \cos(\pi t^2)\, dt$$

existiert, obwohl

$$\lim_{t\to+\infty} \cos(\pi t^2)$$

nicht gleich Null ist.

Lösung: Aus Punkt (a) gilt Folgendes:

$$\int_1^{+\infty} \cos(\pi t^2)\, dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sin(\pi x^2)}{2\pi x} + \frac{1}{4\pi} \int_1^{x^2} \frac{\sin(\pi y)}{y^{3/2}} dy \right).$$

Da $|\sin(\pi x^2)/(2\pi x)| \le 1/(2\pi x)$ folgt, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\pi x^2)}{2\pi x} = 0.$$

Das zweite uneigentliche Integral konvergiert aus Lemma 5.8.3: Es gilt $|\sin(\pi y)/(y^{3/2})| \le 1/y^{3/2}$, und

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^{x^2} \frac{1}{y^{3/2}}\, dy = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{2}{x} + 2 \right) = 2.$$

13.6. Sei $f(x) = \tan(x/2) = \sin(x/2)/\cos(x/2)$ definiert für alle $|x| < \pi$. Aus den Eigenschaften der Tangensfunktion geht hervor, dass f eine wachsende Bijektion von $]-\pi, \pi[$ nach $\mathbb{R}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\cos(x) = \frac{1 - f(x)^2}{1 + f(x)^2}, \qquad \sin(x) = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}$$

für $|x| < \pi$.

Lösung: Es sei daran erinnert, dass die folgenden Identitäten gelten:

$$\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y), \qquad \cos(2y) = \cos^2(y) - \sin^2(y).$$

Dann gilt es:

$$\frac{1 - f(x)^2}{1 + f(x)^2} = \frac{\frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}}{\frac{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \cos(x),$$

und

$$\frac{2f(x)}{1 + f(x)^2} = \frac{\frac{2\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}{\frac{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \sin(x).$$

(b) Zeigen Sie, dass f differezierbar ist, und dass

$$f'(x) = \frac{1 + f(x)^2}{2}$$

für $|x| < \pi$.

Lösung: Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2}\tan'(x/2) = \frac{1 + \tan(x/2)^2}{2} = \frac{1 + f(x)^2}{2}.$$

(c) Berechnen Sie unter Verwendung der Substitution $t = f(x)$ eine Stammfunktion von

$$g(x) = \frac{1}{\cos(x) + \sin(x)}$$

für $|x| < \pi$.

Hinweis: Verwenden Sie auch einen Teil von Aufgabe 2.

Lösung: Sei $t = f(x)$. Dann, aus Punkt (b) gilt es $dt = f'(x)dx = \frac{1+f(x)^2}{2}dx = \frac{1+t^2}{2}dx$. Aus Punkt (a) und Aufgabe 13.2, folgt schliesslich daraus:

$$\begin{aligned}\int g(x)\,dx &= \int \frac{1}{\cos(x) + \sin(x)}\,dx = \int \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{2t}{1 + t^2}\right)^{-1} \frac{2}{1 + t^2}\,dt \\ &= \int \frac{2}{1 - t^2 + 2t}\,dt = -\frac{2}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan(x/2) - 1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$