Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

1.1. MC Fragen: Supremum und Infimum auf $\mathbb{R}$. Wählen Sie die einzig richtige Antwort.

(a) Wenn $x < y$ reelle Zahlen sind, dann $\frac{1}{1+y} \leq \frac{1}{1+x}$.

○ Richtig ○ Falsch

(b) Wenn $A \subset \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt, dann besitzt $A \cap \mathbb{Q}$ auch ein Maximum.

○ Richtig ○ Falsch

(c) Sei $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$. Dann gilt

○ $\max(A) = 1$, $\min(A) = 0$. ○ $\max(A) = 1$, $\inf(A) = 0$.

○ A hat kein Maximum, $\inf(A) = 0$. ○ $\sup(A) = 1$, $\min(A) = 0$.

1.2. Zeigen Sie, das für alle $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $0 < x < y$, folgendes gilt:

$$0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

1.3. $\star$ Ungleicheiten

(a) Seien a und b zwei reelle Zahlen und $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}).$$

(b) Folgern, dass $0 \leq a^n \leq b^n$, wenn $0 \leq a \leq b$.

(c) Folgern auch, dass

$$0 \leq (a+h)^n - a^n \leq nh(a+h)^{n-1}$$

gilt, wenn $a \geq 0$ und $h \geq 0$.

(d) Sei $0 \leq a < 1$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass

$$0 \leq 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \leq \frac{1}{1-a},$$

für jede natürliche Zahl n.