Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

2.1. MC Fragen: Intervalle, Komplexe Zahlen und Folgenkonvergenz. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Wenn A und B zwei intervalle von $\mathbb{R}$ sind, dann ist $A \cup B$ auch ein Intervall.

◯ Richtig ◯ Falsch

(b) Seien $a_0, \ldots, a_4$ reelle Zahlen. Falls $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der folgenden Gleichung

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_4 z^4 + z^5 = 0,$$

ist, dann ist $\bar{z}$ auch eine Lösung.

◯ Richtig ◯ Falsch

(c) Sei z_1 und z_2 zwei komplexe Zahlen so, dass $|z_1| = |z_2|$. Dann, gilt $z_1 = z_2$ oder $z_1 = -z_2$.

◯ Richtig ◯ Falsch

(d) Seit z eine komplexe Zahl. Dann existiert $b \in \mathbb{R}$ so, dass $z = ib$ genau dann, wenn $\bar{z} = -z$.

◯ Richtig ◯ Falsch

(e) Sei (a_n) eine konvergente Folge. Dann ist ihr Grenzwert > 0, wenn $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

◯ Richtig ◯ Falsch

2.2. Ungleicheiten Zeigen Sie, dass für alle reelle Zahlen $a, b > 0$, folgendes gilt:

$$\frac{2}{1/a + 1/b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

2.3. Komplexe Zahlen I Bestimmen Sie für jede der folgenden komplexen Zahlen ihre kartesische Form $a + ib$.

$$(3+2i)(6-i), \quad \frac{2i}{3-2i}, \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

2.4. ⋆ **Komplexe Zahlen II** Sei $z = a + ib$ und $w = c + id$ zwei komplexe Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass $c \leq |w|$.

(b) Zeigen Sie, dass $z^2 = w$ genau dann, wenn

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = c, \\ 2ab = d. \end{cases}$$

(c) Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten

$$|w| = a^2 + b^2, \quad a^2 = \frac{1}{2}(|w| + c), \quad b^2 = \frac{1}{2}(|w| - c),$$

wenn $z^2 = w$.

(d) Umgekehrt zeigen Sie, dass es für jede komplexe Zahl $w = c + id$ zwei reelle Zahlen a, b gibt, sodass

$$a^2 = \frac{1}{2}(|w| + c), \quad b^2 = \frac{1}{2}(|w| - c).$$

Darüber hinaus gelten die folgenden Gleichungen

$$a^2 - b^2 = c, \quad (2ab)^2 = d^2.$$

(e) Folgern, dass eine Lösung $z = a + ib$ der folgenden Gelichung immer existiert:

$$z^2 = w.$$

Hinweis: Benutzen Sie die vorheirigen Fragen. Bemerken Sie, dass das Vorzeichen von a und b kann geändert werden.

2.5. ⋆ **Folgenkonvergenz** Sei (a_n) eine konvergente reelle Folge. Zeigen Sie, dass (a_n) beschränkt ist. Das heißt, eine reelle Zahl $C \in \mathbb{R}$ existiert so, dass $|a_n| < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2.6. Grenzwert Beweisen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = 0.$$